

S MDF

Svensk Förening för MatematikDidaktisk Forskning

MEDLEMSBLAD

Nr 7

Maj 2003

INNEHÅLL

Medlemsblad nr 7 (<i>Christer Bergsten</i>)	1
Några rader från ... (<i>Barbro Grevholm</i>)	2
Forskarutbildning i matematikdidaktik ... (<i>Barbro Grevholm</i>)	5
Learning geometry ... (<i>Rudolf Strässer</i>)	10
Vad betyder det att lärarutbildningen ... (<i>Barbro Grevholm</i>)	19
Matematiken i PISA (<i>Astrid Pettersson</i>)	27
CERME 3 (<i>Teresia Jakobsson-Åhl m.fl.</i>)	31
Senaste nytt från <i>Forum for matematikkens didaktik</i> (<i>Barbro Grevholm</i>)	39
Debattforum – Matematik och språk (<i>Håkan Lennerstad & Ulf Persson</i>)	41
E-postadresser och Anslagstavlan	48

Redaktör för Medlemsblad nr 7 har varit *Christer Bergsten*

Medlemsblad nr 7

Under rubriken *Några rader från...* berättar inledningsvis föreningens ordförande om vad som är på gång i SMDF och svensk matematikdidaktik i övrigt.

Medlemmarna i SMDF inbjuds att till medlemsbladet skicka in kortare artiklar eller berättelser, som kan vara av intresse för föreningens medlemmar att ta del av. Detta nummer inleds med de två presentationer som gavs i samband med SMDF:s årsmöte den 24 januari. Barbro Grevholm beskriver den starka satsningen på matematikdidaktisk forskning som görs vid Högskolen i Agder (i Kristiansand i Norge) och Rudolf Strässer tar upp geometriundervisningens mål och begrepp utifrån distinktionen mellan euklidisk och beskrivande geometri.

Läroutbildningens forskningsanknytning är ett ämne som aktualiserats av den nya läroutbildningen, och som bland annat tas upp vid det internationella symposiet om läroutbildning i matematik i Malmö 5-7 maj. Barbro Grevholm ger i detta nummer av medlemsbladet sin syn på problematiken. Ett annat aktuellt team är utvärdering av kunskaper, bland annat står den internationella PISA-undersökningen just nu i fokus. Astrid Pettersson berättar här om matematiken i PISA.

I detta nummer finns också en reserapport från den europeiska konferensen CERME3, som ägde rum i Italien månadsskiftet februari-mars. Flera av SMDF:s medlemmar var där aktivt engagerade, och några av doktoranderna i RJ:s forskarskola i matematik med ämnesdidaktisk inriktning sammanfattar sina bidrag och sina intryck från konferensen. En rapport från närmre håll ges som vanligt av Barbro Grevholm om vår danska systerförening *Forum for Matematikkens Didaktik*.

Avslutningsvis introduceras ett helt nytt inslag i SMDF:s medlemsblad, *Debattforum*. Där kan frågor och ämnen som är aktuella och av allmänt intresse för medlemmarna diskuteras fritt, öppet och otvunget. Välkommen med bidrag! I detta nummer är ämnet Matematik och språk, som är också är temat för vår nästa konferens MADIF 4 i Malmö i samband med Matematikbiennalen. Detta intressanta ämne debatteras här av Håkan Lennerstad och Ulf Persson.

/ Christer Bergsten

Några rader från ...

Varma gratulationer till vår danska systerförening *Forum for matematikkens didaktik* som firar sitt 10-årsjubileum den 29 april 2003. Med anledning av det inbjuder *Forum* till en "födelsedagskonferens" tisdagen den 23 september 2003 vid Det Syddanske Universitet. Vi ropar hurra fyra gånger och lyckönskar. Två av förgrundsfigurerna i föreningen, Mogens Niss och Morten Blomhøj, säger i en intervju med anledning av jubileet att de tycker att föreningen kunnat bidra till att skapa debatt och kontakter mellan dem som är intresserade av matematikdidaktik. En del av den animositet som fanns vid vissa institutioner har försvunnit under årens lopp. Föreningen har kunnat skapa tillit mellan skilda lager inom utbildningssystemet. Däremot anser de inte att föreningen i någon högre grad kunnat medverka till att främja forskningen inom matematikdidaktik. De pekar på att för att en förening av det här slaget ska överleva krävs det att man ordnar konferenser och har stående inslag i verksamheten som blir uppskattade. Det fanns faktiskt en period 1997 då *Forum* var allvarligt hotat av nedläggning. Nu kan man glädja sig åt en blomstrande verksamhet.

Vid SMDFs årsmöte i Stockholm den 24 januari 2003 valdes en delvis ny styrelse. Jag omvaldes som ordförande, Christer Bergsten som vice ordförande, Thomas Lingefjärd kvarstår som kassör och Jesper Boesen som styrelsemedlem. Ny ordinarie styrelseledamot är Astrid Pettersson som är sekreterare och styrelsen har också de två suppleanterna Lil Engström (nyval) och Bengt Åhländer. Valberedningen inför 2004 års val består av Lisbeth Lindberg och Göte Dahland. De två föredrag som hölls vid årsmötet återfinns i detta nummer av Medlemsbladet.

Vi är glada för att antalet medlemmar ökar, även om det sker i relativt lugn takt. Det är uppenbart att den bästa rekryteraren av nya medlemmar är en som redan är medlem och är nöjd. Frågan diskuterades vid årsmötet och alla "gamla" medlemmar får på detta sätt en förfrågan om att försöka attrahera någon kollega att bli medlem i SMDF. Vi konstaterade i diskussionen att det finns många som är intresserade av matematikdidaktisk utveckling och forskning och som säkert skulle vilja bli medlemmar om någon bara fick dem att ta det där första steget att betala in sin medlemsavgift. Ta för vana att ha ett ifyllt inbetalningskort med dig när du träffar kollegor som kan tänkas bli medlemmar och ge dem kortet i handen. Då kanske det påminner dem om att göra inbetalningen av den låga medlemsavgiften 200 kr. För den får du regelbundet SMDFs medlemsblad med

artiklar och nyheter och en årsbok, vanligen från någon av de konferenser SMDF arrangerar eller medverkar i. Du får även inbjudningar till alla konferenser och arrangemang som SMDF svarar för.

Inom kort är vi framme vid det forskningssymposium om lärarutbildning i matematik som äger rum i Malmö den 5-7 maj och där SMDF medverkar. Mer information om det finns på hemsidan och vi kommer att rapportera om arbetet i nästa medlemsblad. Första dagen är programmet öppet för alla intresserade som anmäler sig. De övriga dagarna är symposiet endast för de inbjudna forskare som ska medverka i programmet med rubriken *Morgondagens matematiklärare – utbildning och kompetensutveckling*.

Nästa Madif-konferens är under planering och kommer att förläggas till Malmö dagarna före Matematikbiennalen i januari 2004. Du som vill medverka kan redan nu börja fundera på vad du skulle vilja bidra med. Temat kommer att vara *Matematik och språk*.¹ Men redan i höst kommer en annan konferens som kanske kan intressera matematikdidaktiker. I Örebro anordnas den andra Nordiska konferensen om matematiksvårigheter.² Den första ägde rum i Kristiansand i Norge i september 2001 och har dokumenterats i den omfattande boken *En matematikk for alle i en skole for alle*. Boken är utgiven av Högskolen i Agder i samarbete med Sörlandet kompetenscenter. För dig som arbetar med elever som har behov av särskilt stöd i matematik kan denna bok vara särskilt intressant läsning. Både lärare, lärarutbildare och forskare medverkar med bidrag från olika infallsvinklar om specialpedagogik inom matematiken.

En fråga som vi kanske bör studera närmre i framtiden är hur uppföljning går till för elever som behöver särskilt stöd. I många år har intresset för diagnosticering i matematik av elever bara ökat och allt fler och mer genomtänkta diagnoser har presenterats. Men vad händer efter diagnosen? Hur vet läraren och eleven hur de ska gå vidare tillsammans när de väl har sett resultatet av diagnosen? Jag har fått många frågor från lärare som upptäckt en eller annan lucka i en elevs kunskaper och undrar hur just det ska åtgärdas. Läraren kan ha prövat med en viss metod och en typ av förklaring men eleven utvecklas inte ändå. Läraren kommer inte på några alternativa sätt att gå tillväga. Var ska läraren då söka uppslag? Ja, det går att rådgöra med andra kollegor och höra hur de brukar gå fram. Men många lärare efterlyser böcker eller handledningar där de kan få nya infallsvinklar för sitt arbete. Sådant material kan vara nog så svårt att finna. Kanske skulle man kunna finna goda uppslag i forskningsartiklar, men de är tyvärr ofta utom

¹ Se information under rubriken *Konferenser* på SMDF:s hemsida www.mai.liu.se/SMDF

² Se information under rubriken *Konferenser* på SMDF:s hemsida www.mai.liu.se/SMDF

räckhåll för lärare. Man kan inte heller förvänta sig att lärare ska ha så mycket tid att den kan gå igenom och söka systematiskt i den typen av trycksaker. Vidare behöver lärare få forskningens resultat överfört till ett handgripligt förfarande tillsammans med eleven. Även det är ibland ett avancerat och tidskrävande steg att ta. Vad har du som medlem i SMDF för svar att ge till de lärare som söker alternativa förklaringar och metoder att använda tillsammans med sina elever? Vi välkomnar en rad inlägg kring denna problematik för kommande nummer av SMDF-bladet.

Hur kan lärare dela med sig till varandra av sin erfarenhet? En del av professionalismen ligger i att kunna dokumentera i vad professionalismen består. Kommer vi i framtiden att få se exempel på hur lärare prövar ut och förfinar sina lektionsinslag och därefter offentliggör dem så att andra lärare kan få nytta av dem. När vi nu lätt kan bygga upp databaser med undervisningsmaterial är detta kanske inte en ouppnåelig framtidsvision? Hur ser det ut på din skola, högskola eller ditt universitet? Delar lärarna med sig till varandra av lektionsidéer och material de arbetat fram? Eller är sådant personlig egendom och hålls inom lyckta dörrar? Hur gör du själv? Välkommen med dina tankar eller reflektioner...

.... *Barbro Grevholm, ordförande i SMDF*

Forskarutbildning i matematikdidaktik vid Høgskolen i Agder – En unik satsning³

En unik satsning på matematikdidaktik

Hösten 2001 utlyste høgskolan i Agder tre professorer i matematikdidaktik. Idag 2003 är alla tre tjänsterna tillsatta. De innehåser av Anna Kristjansdottir, Barbara Jaworski och Barbro Grevholm. Dessutom har en person, som redan var anställd fått befördran till professor, nämligen Maria Luiza Cestari. Vid høgskolan fanns sedan år 2000 en professor i matematikens historia, Reinhard Siegmund-Schulze. Sedan tidigare finns en resursstark grupp av docenter och lektorer i matematikdidaktik vid høgskolan.

Vadan denna satsning?

Bakom denna unika satsning döljer sig många års systematiskt arbete för att utveckla ämnet matematikdidaktik vid høgskolan. 1994 bildades den nuvarande høgskolan i Agder genom att sex högre utbildningsanstalter gick samman till en. Där bland fanns distriktshøgskolan i Agder och Lärarhøgskolan i Kristiansand. Høgskolans mål är att bli universitet 2005.

Redan 1994 erhöill høgskolan rätten att ge en tvåårig ”hovedfags”-utbildning (mastersexamen) i matematikdidaktik. Från den utbildningen har man fram till idag examinerat hela 50 studenter. Det betyder att det finns en stor grupp som är intresserade av att bygga på sin utbildning till doktorsexamen.

Høgskolan ansökte år 2000 om rätten att få ge forskarutbildning i matematik och i matematikdidaktik. Ansökan bedömdes av en expertgrupp, som avvisade den del som rör matematik, men tillstyrkte forskarutbildning i matematikdidaktik under förutsättning att høgskolan anställde fler personer i toppjänster i ämnet och mera ingående beskrev kursutbudet för doktoranderna.

Høgskolan i Agder

Høgskolan har sju fakulteter och vi talar här om fakulteten (avdelningen) för realfag, som består av två institutioner, ”institut for matematiske fag” och ”institut for naturvitenskaplige fag”. Høgskolan i Agder är den största høgskolan

³ Föredrag vid SMDFs årsmöte 24 januari 2003

i Norge för närvarande och ambitionen är att inom kort bli landets femte universitet. I den strategiska planen för högskolan finns en vision och huvudstrategi för åren 2000-2006. Den uttalar att högskolan i Agder ska bli ett internationellt erkänt lärosäte och bjuda betydande och avgörande bidrag till utvecklingen av ett lärande samhälle. Genom att satsa på professions- och disciplinutbildningar, forskning och forskarutbildning ska högskolan i Agder utvecklas till Agder universitet. En hög nivå när det gäller kunskap och kompetens kommer att vara centralt i den vidare utvecklingen av samhället.

Högskolan har cirka 7000 studenter och cirka 700 anställda. ”Avdelingen for realfag” har cirka 600 studenter och 60 anställda. Undervisning ges i biologi, fysik, kemi, matematik, matematikdidaktik, statistik och informatik.

Hovedfag i matematikdidaktik

Hovedfaget i matematikdidaktik bygger på en solid grund med matematik (30 vektal). Målet är att utbilda matematiklärare för alla nivåer - från förskola till universitet. Många av dem som examinerats sedan 1994 arbetar för närvarande inom universitet och högskolor, ofta med lärarutbildning i matematik.

Högskolan i Agder har redan tidigare haft en knutpunktsfunktion för landet med realfagsdidaktik med huvudvikt vid matematik och bruk av IKT.

Forskarutbildningen i matematikdidaktik

Vid tiden för ansökan om forskarutbildning hade ”institutt for matematiske fag” sex professorer, två docenter, två professor II-anställningar, nio försteamanuensis (motsvarar den svenska titeln universitetslektor), två förste lektor, fyra högskolelektorer eller amanuenser.

Från hösten 2002 finns fem doktorander i matematikdidaktik och flera ansökningar är under läsåret 2002/3 lämnade om medel för ytterligare doktorandtjänster (doktorgradstipend). Under våren 2003 ska ytterligare fem doktorandtjänster i matematikdidaktik annonseras ut. Kursutbudet för forskarstudier i matematikdidaktik innehåller för närvarande följande kurser:

MA6050 Research design and research methods for mathematics education

MA6010 Theory of science (Vitenskapsteori)

MA6020 Theories for learning and teaching mathematics

MA6060 Historiske grunnlag for og hovedtrekk i moderne matematikk

MA6120 IKT i læring og formidling av matematikk

MA6030 Problemløsning i matematikk

Alla kurserna är på 10 poäng utom Vetenskapsteorin, som är på 5 poäng. Den är avsedd att läsas i kombination med en allmän kurs i vetenskapsteori som ges gemensamt för alla doktorander på högskolan. Antagningskraven är att ha cand scient examen (dvs hovedfag i matematikdidaktik) eller civilingenjörsexamen från Norge. Normal studietid omfattar 60 studiepoäng för kurser, varav fem poäng utgörs av den obligatoriska provföreläsningen vid disputationen. Avhandlingen omfattar 120 poäng och beräknas ta två läsår. Kursdelen ska innehålla minst 35 poäng. Resterande poäng upp till 60 kan utgöras av utlandsstudier, seminarieaktiviteter eller speciella projekt.

Avhandlingens huvudresultat ska vara publicerbara. Utbildningen avslutas med disputation som bedöms av en bedömningskommitté, med minst 2 medlemmar som inte är knutna till högskolan i Agder. De ska båda fungera som opponenter. De generella anvisningarna för utbildningen följer en standardplan för Norge. För den intresserade finns fyllig information på högskolans hemsida om forskarutbildningen, antagning och kursutbud. Se www.hia.no.

Mathematics Education Research Group at Agder, MERGA

Den stora och livaktiga gruppen av forskare inom matematikdidaktik har beslutat kalla sig MERGA-gruppen. Visionen som gruppen gemensamt lagt fast formuleras så här:

The intention is to work for general education in mathematics, for education of competent mathematics teachers, for quality of mathematics in schools, for recruitment to mathematics studies and for disseminating mathematical knowledge in the society.

We build further - on the best in our traditions and prior work.

Keywords

Cooperation: internally- externally

Contact: mathematics - education- school

Willing to meet quality requirements

Samarbetspartners

Högskolan i Agder kommer att samarbeta med det nationella centret för matematiklärande i Trondheim, som leds av Ingvill Holden. Centret har under 2003 antagit tre doktorander och deras handledning kommer till del att ske i samarbete med högskolan i Agder. MERGA-gruppen har vidare för avsikt att utveckla ett nordiskt samarbete inom forskningen i matematikdidaktik genom att bygga vidare på redan befintliga nätverk. Ett vittnesbörd om sådana nätverk är

den dokumentation från den andra nordiska konferensen i matematikdidaktik, som arrangerades under ledning av två av nyckelpersonerna i den tidiga uppbyggnaden av matematikdidaktiken i Agder (Breiteig & Brekke, 1998). Genom de personer som arbetar på institutionen finns redan ett avsevärt internationellt nätverk inom matematikdidaktisk forskning. Flera av professorerna och docenterna har redan extern handledning av doktorander i andra länder. De fem professorerna i gruppen representerar i sig själva Brasilien, England, Island, Sverige och Tyskland. Gäststudenter från Norden och andra länder är välkomna.

Högskolans betydelse för regionen

Inom matematikdidaktik har högskolan etablerat samverkan med Sörlandets kompetenscenter och med Forum för matematikvansker. Ett gemensamt centrum för matematiklärande har bildats med lokala partners och högskolan. Centret driver på högskolan i Agder en matematikverkstad, som kan besökas av skolor, elever och lärare för att ta del av material och metoder för matematikundervisning. Inom det lokala samarbetet har en första nordisk konferens om matematikvansker hållits samt en konferens om matematikens historia under ledning av bland annat Otto Bekken. Från den förra konferensen finns en gedigen dokumentation (Forum for matematikkvansker, 2002).

Pågående verksamhet inom matematikdidaktik

Sedan flera år tillbaka finns en verksamhet med seminarier i matematikdidaktik, där traditionen varit dels att inbjuda framstående internationella föreläsare och dels att låta de lokalt verksamma forskarna och studenterna presentera sina arbeten. Alla hovedfagstudenterna presenterar sina uppsatser i seminarieserien. För den intresserade finns en förteckning på nätet av alla hovedfagsarbeten med titlar och abstract. I serien kommer även doktoranderna att få presentera sina arbeten.

Vårterminen 2003 gavs för första gången doktorandkursen *Forskningsdesign och forskningsmetoder* under ledning av Barbara Jaworski. Kurserna är upplagda så att även doktorander som studerar på distans kan delta i dem. Avsikten är att kurserna ska innehålla moment som gör att doktoranderna inom kursen gör en viss del av sin avhandling nästan klar. Det kan gälla att skriva ett teoriavsnitt, bearbetning av del av empiri eller en historisk del av avhandlingen eller liknande.

Nordisk forskarskola i matematikdidaktik?

MERGA-gruppen arbetar med en fördjupad ansökan om att få driva en nordisk forskarskola i matematikdidaktik efter att ha vunnit framgång i första etappen av en sådan ansökan. Nordiska Forskarutbildnings Akademien kommer att bevilja en miljon norska kronor per år i fem år till fem nordiska forskarskolor i olika ämnen. Forskarskolan kommer att vara öppen för doktorander i Norden och de baltiska länderna och deras handledare. Ett stort antal institutioner med forskarsutbildning i matematikdidaktik har visat intresse för att ingå i en sådan forskarskola och medverka genom att erbjuda kurser eller sommarskolor. MERGA-gruppen vid högskolan i Agder är villig att ta ett stort ansvar för att en sådan verksamhet för framtiden skulle kunna stärka och stabilisera forskarutbildningen och forskningen i matematikdidaktik i Norden. Om alla goda krafter kan samverka kanske matematikdidaktik i Norden kan bli en faktor att räkna med i framtiden.

Referenser

Breiteig, T. & Brekke, G. (1998). *Theory into practice in mathematics education*.
Kristiansand: Faculty of mathematics and sciences.

Forum for matematikkvanser (2002). *En matematikk for alle i en skole for alle*.
Kristiansand: Forum for matematikkvanser.

/ Barbro Grevholm

Learning geometry in secondary schools: Aims, concepts, computers⁴

Teaching Geometry in secondary schools: Aims

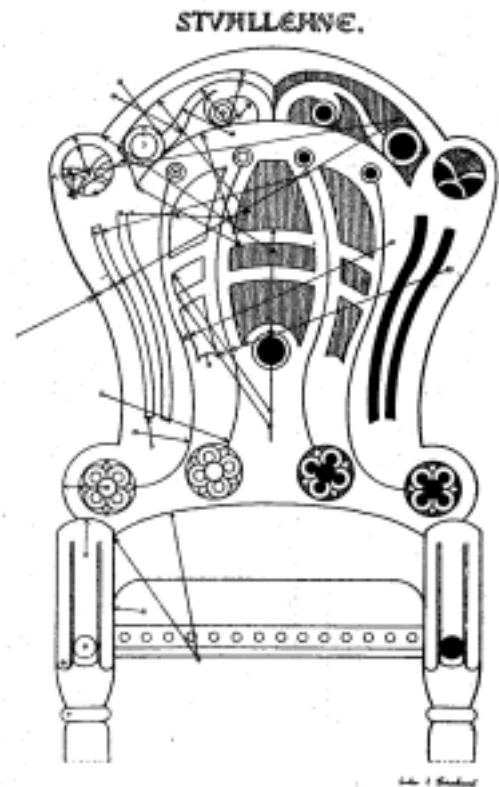
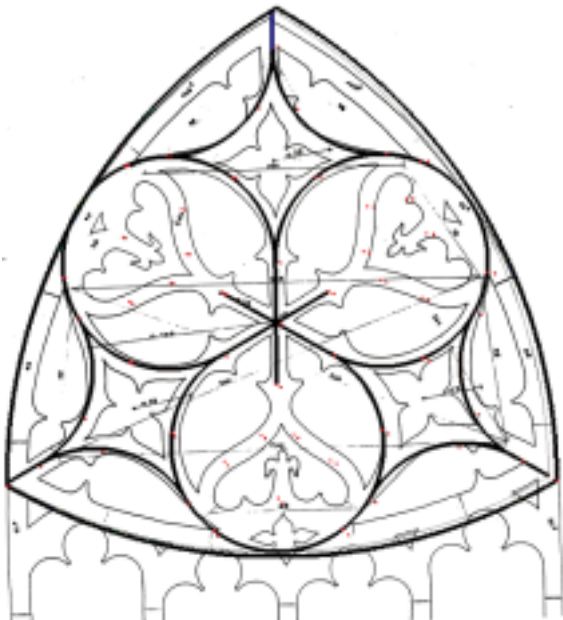
Looking into the teaching of Geometry in secondary schools - especially for compulsory school in grades 6 to 9 - one can find two types of Geometry in the classroom: “euclidean” Geometry and “descriptive” Geometry. These two school geometries have different aims.

In lower secondary, compulsory school (in Sweden the so-called ‘Grundskolan’), “euclidean” Geometry will first come to mind. Here we are into constructions with a prescribed, often restricted set of tools (traditionally: ruler and compass). An important activity is exchanging arguments on drawings (hopefully constructed by the students themselves), which “at best” are structured into proofs. Some decades ago, this was the place to introduce students to mathematical thinking, argumentation and axiomatics - but had a sharp decline with the advent of the ‘modern Maths movement’ in the late 60ies of the last century.

”Everybody” a little bit interested in Mathematics knows about and remembers ”euclidean” Geometry. The sum of the angles in a triangle adding up to 180° may be one of the best-known examples of euclidean Geometry in the narrow sense from Mathematics as a scientific discipline. Its proof from the famous “Elements” of Euclid is an excellent illustration of this aspect of Geometry - and was often the first proof students met.

Even with its decreasing importance in schools since the late sixties, Geometry nevertheless was not completely thrown out of lower secondary Mathematics teaching, precisely because of its second, “descriptive” aspect. Here, Geometry is used as a tool kit to model and explore the world around us, to better understand spatial relations, more general: real life situations. In descriptive Geometry, the aim is to better understand a situation (in most cases: not coming from Mathematics, but from the world outside Mathematics), sometimes even to find a solution for a problem the situation implies, to really cope with the situation.

⁴ Föredrag vid SMDFs årsmöte 24 januari 2003



from Becker&Vonderlinn, p.

Drawing 1. Examples of “descriptive” Geometry

Descriptive Geometry can be exemplified by window frames (windows in gothic churches offer marvellous examples, see drawing above), floor tilings & patterns, ornaments, mosaics, ceilings (structure and painting), art deco / art nouveau (in all everyday tools), architecture, proportional reduction & enlargement are additional examples (the list was gathered by looking through Becker & Vonderlinn ,1912).

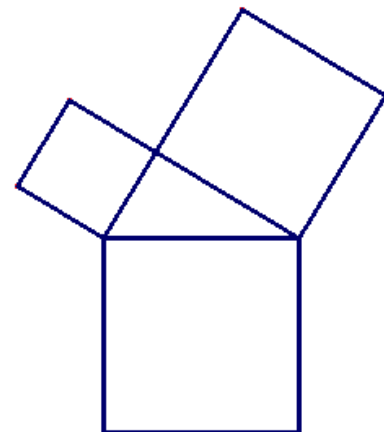
Dynamic examples of ”descriptive Geometry can be sliding doors of garages (see drawing 2 below) as well as transmissions and gears and the like. The book of Hohenberg (1966) entitled “Konstruktive Geometrie” presents lots of more advanced examples - and technical universities heavily train their future engineers’ in descriptive Geometry.



Drawing 2. Different types of sliding doors of a garage, viewed from the side.

The "Pythagorean" Theorem in the form of $a^2 + b^2 = c^2$ is the best known mathematical formula (obviously coming from Geometry!). Its variety of proofs (for a classification see Fraedrich 1994) obviously belongs to 'euclidean' Geometry in the terminology outlined above, whereas the prototypic drawing (see besides) will be recognised by a large number of mathematical lay(wo)men. The standard use of this theorem nevertheless belongs to 'descriptive' Geometry: In most cases, the Pythagorean Theorem is used to calculate lengths or secure rectangular angles especially in the practice of craftsmen.

Naturally, both aspects of Geometry can be found in the Swedish curriculum document. I just cite "Strävan skall också vara att eleven utvecklar sin tal- och *rumsuppfattning* samt sin förmåga att förstå och använda ... grundläggande geometriska begrepp, egenskaper, relationer och satser." (my bold and italics; from the recent "Kursplaner Matematik" at <http://www3.skolverket.se>).



Drawing 3.
prototypic "Pythagoras"

In Didactics of Mathematics, the terminological distinction of "euclidean" and "descriptive" Geometry made its first explicit appearance in Sträßer 1990. The terminology obviously plays with precious words from disciplinary Mathematics, widening its sense for use in Didactics of Mathematics. A glimpse into the history of Mathematics, more specifically Geometry, shows that these two aspects had always been present in the history of the subject (typical Heilbron (1998) in the introduction, the comprehensive history of Geometry from Scriba&Schreiber (1998) can be read as a long illustration of these aspects of Geometry).

The "reality" of teaching Geometry in secondary schools

Teaching Geometry in compulsory schools seems to somehow respect the difference between euclidean and descriptive Geometry: From what one knows (at least about the actual teaching in Germany), the "reality" of the classroom offers the impression that descriptive Geometry (especially traditional drawing with paper and pencil) is for the less abled. Every student has to learn about basic geometrical constructions, is asked to tinker with spatial relations and - by these activities - hopefully explores his environment. In contrast to this, euclidean Geometry in terms of studying logical implications is for the talented. Proofs (if any) are only studied by the brightest students. This description can easily be substantiated by a look into the respective textbooks of lower secondary schools which for the vast majority of German students in grades 5 to 10 are clearly differentiated according to the level of learning deemed appropriate for the students (different types of schools for three achievement levels).

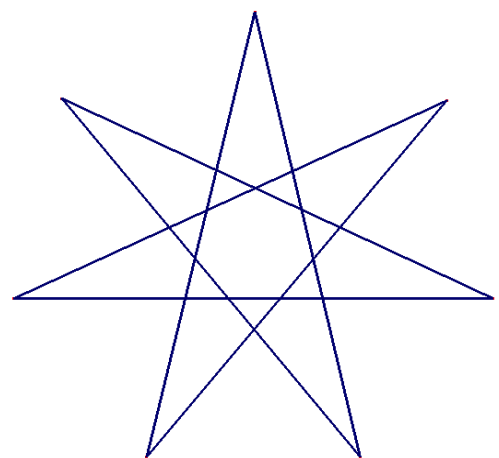
With a comprehensive, unified school for the same age group ('Grundskolan'), the situation in Sweden cannot be described as easily as for Germany. Here is room for a fact finding mission to know more about the teaching and learning of Geometry in Sweden. Textbook studies and classroom analysis by video-studies would be appropriate ways to get scientific information on this topic - and this is part of what will be done in the "Mathematics and Learning in Luleå (MaLiL)"-group in the future.

Concepts for understanding classroom"reality"

This section identifies some key concepts from Didactics of Mathematics especially helpful to better understand the classroom reality related to teaching and learning Geometry.

Drawing versus figure

Looking at the drawing beside, one sees a nice regular 7-star. Lengths of segments joining the seven heights of the star look perfectly congruent as well as the angles in the drawing. A knowledgeable geometer nevertheless knows: regular 7-gons can**NOT** be constructed with ruler and compass. In fact, the drawing was constructed using a traditional approximation, which can also be



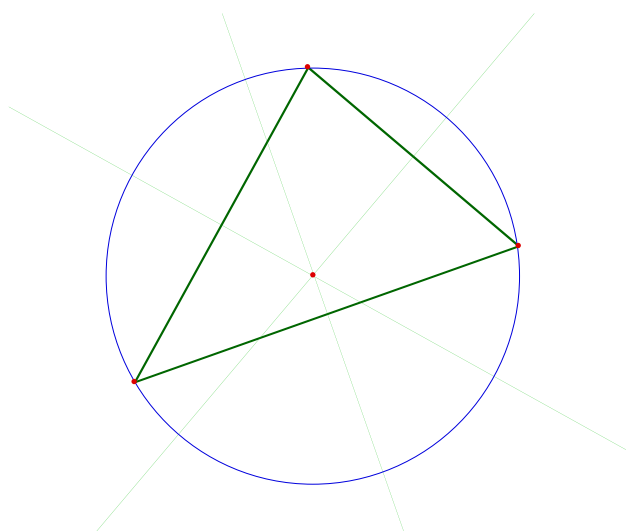
Drawing 4. A "regular" 7-star

found in Becker & Vonderlinn (1912). With modern technology like Dynamical Geometry Software (“DGS”, I will come to back to this in the next section, regular n-gons a very easily constructed because this type of software is based on analytic, coordinate geometry and its potential in terms of using algebra. A division of an angle by a natural number then is easy - and the drawing as accurate as the calculation of the computer algebra system used.

From the example of the 7-star, one can learn that - in Geometry - it is wise to distinguish the material realisation on paper (nowadays maybe on screen), the “drawing”, from the set of logico-geometrical relations between geometrical elements like points, line(segment)s, circles and the like, the “figure” (in 1988, the French didactician Bernard Parzysz came up with this helpful distinction). Large parts of the difficulties students encounter in lower secondary Geometry lessons (and even later) can be traced back to the fact that they read geometrical relations out of a drawing, whereas only the relations mentioned in the problem-statement should be used for arguments and proofs. They take the “drawing” as a “figur”, they never really learned to separate the drawing of a configuration from its logical relations. Modern software like DGS play on this by not destroying the geometrical relations when the drawing is dynamically changed in the “drag-mode”.

Pitfalls of “visualisation” in Geometry

Drawing a triangle and its mid-perpendiculars, visual perception immediately tells us: Mid-perpendiculars in a triangle meet in one point, the centre of the perimeter of the triangle (see drawing 5).



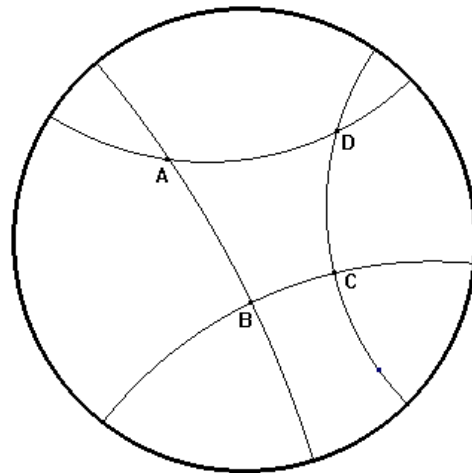
Drawing 5. Mid-perpendiculars in a triangle.

A proof would be like: If M is intersection of mid-perpendicular of AB and BC, its distance from A and B / B and C must be the same, hence its distance from A and C, ...

If we compare the two representations, typical features come up. The drawing gives us an intuition about the logical relations in the figure. For the proof in the "euclidean" part of Geometry, we have to add names for elements of the configuration to unambiguously refer to them in the text which is the basic representation of the proof. For the euclidean aspect, one has to switch from the iconic drawing to symbolic text, one has to switch the "registers" (for this concept see Duval (1993), for a less pertinent, but English reference see Duval (2000)). This switch from a drawing to a text in order to create a valid proof is far from evident in lay(wo)men's Geometry. Handling two different registers in parallel may be responsible for a lot of difficulties in teaching and learning Geometry - and partly explains why this area is so difficult for some students.

Macros and modules: How to organise constructions and arguments ?

To illustrate the "hypothesis of the acute angle" from hyperbolic, non-euclidean Geometry ('With two congruent segments AB and CD perpendicular to a given segment BC, joining A and D with a segment, the inner congruent angles at A and D are acute angles. '), one may produce the following drawing in the conformal Poincaré model (see drawing 6). Some DGS do not only help this complicated construction by offering appropriate "macros" (see next section). By dragging and inspection of a number of examples, one may even be quite sure about the correctness of the hypothesis.



Drawing 6. The acute angle

What is more interesting in terms of understanding Geometry is the changes implied in the meaning of some of the elements of the drawing: four arcs are turned into hyperbolic segments forming a quadrilateral ABCD looking quite differently than quadrilaterals in traditional Geometry. When using a DGS, the change in the construction activity is even more striking: It would be a tedious task in traditional ruler & compass Geometry to construct a single segment in

the Poincaré model of hyperbolic Geometry. With appropriate “macros” to construct segments and perpendiculars, the above drawing is as easily drawn as the traditional quadrilateral - and this structure of the drawing activity may even help the logical analysis of the configuration. More generally: A good breakdown (into “modules” / “macros”) in a construction / in an argument is very helpful. Unfortunately, we do not yet have the answer to the global question: How to find appropriate modules for Geometry?

Computers and software: remedy or problem?

Some educationalists assume that the decline of teaching Geometry in schools (from the mid-seventies to mid-nineties) has come to a stop mainly because of computers and software like Dynamical Geometry Systems (DGS) and the growing use of descriptive Geometry in society at large. The plethora of graphical design and computer assisted design (“CAD”) programs is only showing how society at large values iconic, graphical information over symbols and words.

The most important (and best researched) type of graphical software used in schools is Dynamical Geometry Software (“DGS”; see for instance the special issue of *Educational Studies in Mathematics* on “proof”, vol. 44, no. 1-2 or of *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 34, no. 3; also: Sträßer 2001). It is difficult, if not impossible to give a good impression of dynamical Geometry software (DGS) in a static text, so only the characteristic features of DGS will be mentioned:

- drag-mode: moving a basic element of a drawing to a new position on screen - with all elements of the drawing being redrawn in a way respecting the logical constraints following from the initial construction (for a detailed empirical analysis of this feature see Arzarello et al., 2002),
- macro-constructions: chunking a series of commands into one single command, assigning it a new name and saving it for future use (for an analysis and possible generalisations see Kadunz, 2002),
- locus of points: highlighting a trajectory of predetermined objects when moving a basic element along a random or predefined path (for an empirical analysis of students use of this feature see Jahn, 2002).

I want to start a co-operation with Luleå schools to learn more about the problems and potentials of DGS in the classroom. This project starts from the assumption that DGS offers gains and losses when teaching and learning

Geometry. As I hope to have already shown some of the gains, I just comment on the losses which can already be identified from the research on DGS:

Experience with the classroom use of DGS (in fact: Cabri-géomètre used in the French 'collège'; the other DGS share this problem) show that 'the rule of the tool' often dominates the activities of the learners instead of thinking in geometric terms. The user is guided by the availability of drawing tools instead of thinking about constructions based on geometrical relations and analysis.

In the second part of the third section the easy access to the iconic register was already mentioned. This often leads to a certain seduction of "seeing" within DGS with the consequence that logical analysis and proof are even more rejected than in a traditional paper & pencil environment. "We don't need a proof - we have already seen it, with dragging even in some hundreds instances!"

The user friendly interface of DGS (and habits from computer use outside the Geometry classroom) also invite to playing with this beautiful tool. As a consequence, the goal of a teaching/learning activity may be forgotten over aesthetic drawings and the ease to change and explore them. "De-goaling" is reported as one of the main problems of teaching with the help of DGS (see Hölzl, 1996, more detailed in Hölzl, 1994, pp. 227-229).

Conclusion

The last comments on problems with DGS have a somehow comforting consequence: Even nowadays - with the availability of Dynamical Geometry Software (DGS) and other "wonders" of technology like the internet ***"there is no royal road to Geometry!"***

References

- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Becker, H. (1912). *Geometrisches Zeichnen*. Leipzig, G.J. Göschen'sche Verlagshandlung.
- Duval, R. (1993). Régistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5: 37-65.

- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 24), Hiroshima, vol. 1, 55-69
- Fraedrich, A. M. (1994). *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Mannheim, B.I. Wissenschaftsverlag.
- Heilbron, J. L. (1998). *Geometry Civilized*. Oxford, Oxford University Press.
- Hölzl, R. (1994). *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
- Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry ? *International Journal for Computers in Mathematical Learning*, 1(2), 169 - 187.
- Jahn, A. P. (2002). „Locus“ and „Trace“ in Cabri-géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 78-84.
- Kadunz, G. (2002). Macros and Modules in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 73-77.
- Parzysz, B. (1988). „«Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures.” *Educational Studies in Mathematics* 19(1), 79 -92.
- Scriba, C. J. and P. Schreiber (2001). *5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen*. Berlin Heidelberg New York, Springer.
- Sträßer, R. (1990). Euklidische Geometrie versus deskriptive Geometrie. *Die Zukunft des Mathematikunterrichts*. Landesinstitut für Schule und Weiterbildung Soest, Soester Verlagskontor: 73-76.
- Sträßer, R. (1992). Didaktische Perspektiven auf Werkzeug-Software im Geometrie-Unterricht der Sekundarstufe I. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 24(5), 197 - 201.
- Sträßer, R. (2001). Cabri-géomètre: Does a Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning? *International Journal for Computers in Mathematics Learning*, 6(3), 319-333.

/ Rudolf Sträßer

Vad betyder det att lärarutbildningen ska vara forskningsanknuten?

Varför ställs frågan om lärarutbildningens forskningsanknytning nu?

Med början höstterminen 2001 införs nu en ny lärarutbildning för alla typer av lärare i ungdomsskolan. I den proposition som regeringen lade fram inför den nya utbildningen, En förnyad lärarutbildning, Regeringens proposition 1999/2000:135 skriver man på sid. 34:

Lärarutbildningarna inordnades i högskolan genom universitets- och högskolereformen 1977. När socialhögskolorna, journalisthögskolorna samt senare vårdhögskolorna blev en del av högskolan etablerade dessa tre yrkesutbildningar en reguljär forskningsorganisation. För lärarutbildningarna kom emellertid inte någon påtaglig förnyelse eller förstärkning av forsknings- och forskarutbildningsorganisationen till stånd. Även om antalet professorer på lärarutbildningens område ökat under senare år har lärarutbildningen en svag vetenskaplig bas vilket gör att utbildningen inte i tillräcklig omfattning vilar på vetenskaplig grund. Andelen forskarutbildade lärare vid de institutioner som i huvudsak bedriver lärarutbildning är låg. För att stärka och bredda den vetenskapliga basen och höja lärarutbildningens status är det därför angeläget att öka antalet forskarutbildade lärare inom lärarutbildningen.

Vad är det egentligen regeringen säger i denna text? För det första konstaterar man att redan genom reformen 1977 kom förordningens ord om att utbildningen vid universitet och högskolor ska vila på en vetenskaplig grund att gälla även för lärarutbildningen. Texten i propositionen avslöjar emellertid inte något om vad formuleringen ”vila på vetenskaplig grund” egentligen innebär när det kommer till utbildningens konkreta genomförande. Vidare framgår det att man anser att antalet forskarutbildade lärare inom lärarutbildningen är för låg. Texten antyder att om antalet forskarutbildade lärare ökar kommer det att stärka och bredda den vetenskapliga basen. Hur går det till?

Möjligen kan man ana att resurser borde ha tillförts lärarutbildningen för att göra det möjligt att bygga upp den reguljära forskningsorganisation som de övriga professionsutbildningarna anges ha. I verkligheten har det varit näst intill omöjligt för lärarutbildare och lärare att få tillgång till forskningsmedel under många årtionden. Medel till forskning om utbildning har istället slussats till de pedagogiska institutionerna.

En problematik som inte alls berörs av regeringen är att de personer som rekryteras till lärarutbildningarna som lärare ofta förväntas ha en tredubbel kompetens. De ska vara lärarutbildade och ha arbetat som lärare med stor framgång på relevant nivå i skolan, de ska ha god kännedom om metodik och didaktik i sina undervisningsämnen och de ska helst ha erfarenhet av forskning och utvecklingsarbete. Att skaffa sig den utbildning och erfarenhet som krävs för att leva upp till denna tredubbla kompetens tar i regel många år. Att då dessutom begära att dessa personer ska vara forskarutbildade är verkligen att önska sig både en omfattande utbildning och kvalificerande erfarenhet hos en och samma person.

Längre fram i texten (sid. 40) skriver regeringen:

Sedan 1977 är lärarutbildningen inordnad i högskolan och omfattas av kravet på forskningsanknytning. Trots att drygt tjugo år har förflutit har universitet och högskolor inte i tillräcklig grad verkat för att en forskningsbas på lärarutbildningens område byggts upp.

Universiteten och högskolorna måste ta ett större samlat ansvar för att stärka den vetenskapliga grunden för sina lärarutbildningar. Lärarutbildningarna utgör en omfattande och viktig del av den verksamhet som universiteten och högskolorna bedriver. Enligt regeringens bedömning fordras det att lärosätena bidrar med betydligt mer medel från befintliga anslag för forskning och forskarutbildning för att en förstärkt forskningsbas skall komma till stånd.

Det är angeläget att de lärarstuderande kommer i kontakt med forskning som knyter an till den pedagogiska yrkesverksamheten. Ämnesinstitutioner med undervisning inom lärarutbildningen bör i betydligt högre utsträckning beakta behovet av ämnesdidaktisk forskning som ställer frågor om hur det kunskapsstoff och de teorier som utvecklas inom de akademiska disciplinerna kan förmedlas och studeras i olika pedagogiska miljöer och som skolämne. Vidare är det angeläget att forskning som bedrivs inom pedagogik, psykologi, sociologi, etnologi, statsvetenskap, ekonomi, filosofi med flera ämnen, och som har relevans för lärarutbildning och skola, verkligen knyts till lärarutbildningarna.

Här pekar regeringen ut universitet och högskolor som ansvariga för att det inte hänt något med forskningsanknytningen av lärarutbildningen på så lång tid. Dessutom får de bannor för att de inte slussat tillräckligt mycket forskningsmedel till sådan forskning som kan ge en förstärkt forskningsbas för lärarutbildningen. Emellertid är det så att en del mindre högskolor förmodligen inte haft särskilt mycket forskningsresurser att fördela. Därför är det svårt att bedöma om regeringen inte till del undandrar sig ett ansvar då de inte tidigare avsatt

medel speciellt för forskning med anknytning till lärarutbildningen. Konsekvenser drogs senare genom den satsning på utbildningsvetenskaplig forskning som skett under åren 2001-3 (Vetenskapsrådet, 2001).

En huvudfråga är emellertid vad som menas med forskningsanknytning. En noggrann läsning av propositionen ger ingen ledning i denna fråga. Regeringen pekar på att förekomsten av fler forskarutbildade lärare inom lärarutbildningen ska garantera forskningsanknytningen. Hur kan man veta att detta verkligen hjälper? Och vad händer när det gäller forskningsanknytning av lärarutbildningarna ute på de olika högskolorna? Det är svårt att få en inblick i och överblick över det.

Konkreta inslag i utbildningen som tydliggör forskningsanknytningen

Det är dags att fördjupa diskussionen och ytterligare konkretisera innebörden i forskningsanknytningen. Jag kommer här att diskutera några inslag i lärarutbildningen som jag anser skulle kunna förbättra forskningsanknytningen. Det skulle vara värdefullt med en öppen debatt (gärna i SMDFs medlemsblad; se ett tidigare inlägg av Bergsten, 2001) bland lärarutbildare och lärarstuderande om liknande konkreta inslag i utbildningen.

Kurslitteratur

En punkt som har diskuterats är hur litteraturen i lärarutbildningens kurser kan visa på forskningsanknytning. När det gäller matematik och matematikdidaktik är det svårt att finna bra litteratur som de studerande klarar av att arbeta med. Det tas för givet att de ska kunna använda engelskspråkig litteratur, men så är inte fallet. Det som ofta glöms bort är att många lärarstuderande är äldre, ibland upp till 50 år då de påbörjar sin utbildning. De har inte sådana kunskaper i engelska att de kan tillgodogöra sig kurslitteratur på det språket. Utbudet av aktuell litteratur på svenska som passar för ämnesinnehållet är synnerligen begränsat. Eftersom varje högskola utformar sina kurser är det svårt att finna en gemensam nämnare som gör det rimligt att producera ny anpassad kurslitteratur. Detta är ett problemområde som borde bearbetas i samverkan mellan olika lärarutbildningar. Av diskussioner inom vissa lärarutbildningar framgår att en bok på svenska med bidrag av nordiska forskare i matematikdidaktik (Grevholm, 2001a) anses för svår för vissa av utbildningarna, som riktar sig till lärare för yngre barn. Självklart måste kurslitteraturen hålla en god vetenskaplig standard och spegla aktuell forskning.

Tillgång till bibliotek med god forskningslitteratur och vetenskapliga tidskrifter

De flesta svenska universitet och högskolor har bra bibliotek och välutbildade bibliotekarier. Vid flertalet lärarutbildningar får studenterna utbildning i hur man använder bibliotekets resurser. Den viktiga frågan är om denna möjlighet till forskningsanknytning sedan används i utbildningen. Det vore värdefullt med inslag och uppgifter i utbildningen där studenterna fick arbeta med uppgifter där de verkligen drar nytta av att söka i aktuell forskningslitteratur. Sådana uppgifter borde ingå i alla kurser och förekomma på sådant sätt att de bildar en progression i studentens utveckling som ska kulminera i genomförandet av examensarbetet. Här finns utrymme för kreativa idéer om lämpliga uppgifter inlagda i flertalet kurser på sådant sätt att de utgör en naturligt integrerad del av utbildningen.

Ett exempel på en sådan uppgift kunde vara att studenterna under praktiken, den verksamhetsförlagda utbildningen (VFU), fick i uppgift att samla in data från någon speciell aspekt, till exempel elevernas muntliga språk i matematik. Uppgiften kan då förberedas vid högskolan genom att studenterna går igenom vad forskningen säger om detta område och läser in sig på det. De observationer som då görs på fältet kan troligen bli bättre och säkrare om studenten har en sådan utgångskunskap. De studerande får tillfälle att relatera teori och praktik till varandra. Det verksamhetsförlagda arbetet skulle kunna bli djupare och mera meningsfullt på detta sätt. De studerande kan dessutom erbjuda praktikhandledaren en kunskap på området och dela den med handledaren.

Att arbeta med synsätt och metoder som en forskare

Examensarbetet är det inslag i utbildningen som bäst ger tillfälle till att arbeta med synsätt och metoder som en forskare. Detta är en värdefull och av studenterna uppskattad del av utbildningen. Om det ska fungera på avsett sätt måste det finnas tillgång till kvalificerade handledare, som själva har erfarenhet av att formulera forskningsfrågor, designa en mindre undersökning, analysera empiriskt material och skriva vetenskapliga artiklar. Tillgången på handledare med sådan kompetens är alltför liten för att alla studerande ska kunna få handledning med kvalitet. Dessutom har det ännu inte utvecklats en praxis och samsyn inom gruppen av lärarutbildare när det gäller krav på och bedömning av examensarbeten.

När det gäller examensarbeten finns det ett behov av att skapa lämpliga undersökningsfrågor och gärna göra det så att flera studenters arbeten kan läggas till varandra för att ge en samlad kunskap. Som det är nu gör varje student eller par av studenter sin undersökning även om den redan gjorts många gånger av andra

tidigare. Det vore värdefullt att ha ett undersökningsområde där studenter tog ansvar för en del efter den andra i sina examensarbeten så att ny kunskap verkligen tillförs genom mångas bidrag i form av var sin mindre del. Jag har inte uppfattat att någon av lärarutbildningarna i landet har organiserat examensarbetenas innehåll på detta sätt trots att jag under flera år framfört detta förslag i diskussioner om examensarbeten. En annan brist är att examensarbetena inte vid alla utbildningar finns tillgängliga för sökning via biblioteken. Den enskilde studenten eller handledaren har svårt att veta om andra redan skrivit om den fråga man vill ta upp.

Att skriva som en form för lärande

Läraryrket är till stor del ett muntligt yrke. Många äldre lärare har aldrig skrivit en större artikel inom sitt undervisningsområde eller dokumentation av sitt arbete. Dagens studenter förväntas kunna skriva ett examensarbete med god kvalitet. För att det ska vara möjligt måste de få arbeta med skrivuppgifter som inslag under hela utbildningen. Dessa skrivuppgifter bör ordnas i en progression för att studenten ska växa i sin kompetens. Återigen krävs det här lärarutbildare med erfarenhet av skrivprocessen och med kompetens att utforma lämpliga skrivuppgifter som är väl integrerade i utbildningen. För lärarutbildare finns ingen egentlig utbildning och frågan är om det inte skulle vara bra att ordna en lärarutbildarutbildning på motsvarande sätt som man har en rektorsutbildning. I en sådan skulle man bland annat kunna arbeta med skrivprocessen och handledarefrågor (Dysthe, Hertzberg & Hoel, 2000).

Förberedelse för forskarutbildning

En ny dimension i den nya lärarutbildningen är att den ska ge behörighet till forskarutbildning. Det innebär att den studerande ska ha vana vid att arbeta med frågor och undersökningar, delta i en öppen debatt om undervisning och lärande, arbeta systematiskt och strukturerat samt kunna ge och ta seriös kritik på ett arbete. En viss överblick över forskningslitteratur och aktuella forskningsresultat förväntas ingå i den grundläggande utbildningen för att forskarutbildningen ska kunna starta från en rimlig nivå. Vana att söka i databaser och i elektroniskt publicerade artiklar och förtrogenhet med litteratursökning är ett rimligt krav som förkunskap för den som ska antas till en forskarutbildning. Det innebär att studenterna bör i viss mån söka litteratur självständigt under grundutbildningen och speciellt för examensarbetet. Även här gäller att inslag av uppgifter som steg för steg ökar kompetensen hos den studerande skulle förbättra situationen. Under fältstudier och verksamhetsförlagd utbildning kan studenterna genomföra mindre datainsamlingar och observationer som därefter bearbetas och

dokumenteras i kurser vid universitetet. Också i detta fall kan studenters adderade material ge en grund för ett mer samlat kunskapsbyggande.

Kommer lärare att gå till forskarutbildning i högre utsträckning efter den nya utbildningen? Det dröjer flera år ännu innan vi kan börja se effekter av det slaget. I väntan på det bör en intensifiering ske av arbetet med att forskningsanknyta lärarutbildningen och ge de studerande positiva erfarenheter och kontakter med forskning.

Aktivt deltagande i forskningsseminarier

De studerande bör kunna få tillfälle att delta i forskningsseminarier under utbildningstiden på en reguljär bas. Det kräver att forskning pågår vid institutionerna och att levande seminarier berör sådana frågor som kan vara av intresse för lärarstuderande. För att få ett aktivt deltagande kan studenterna få i uppgift att referera ett sådant seminarium muntligt eller skriftligt och ge egna reflektioner och egen bedömning av det som framförs. De kan göra posters för en utställning och presentera huvudtankegångarna i ett seminarium. Det finns säkert många andra sätt att göra en sådan seminarierie till en väl integrerad del av utbildningen.

Att uppleva en levande forskningsmiljö

Lärarutbildningen bör idealt ske i en miljö där aktiva forskare och forskargrupper verkar. I en sådan situation kanske de studerande kunde välja frågor för sitt examensarbete som gör att de kan medverka i någon studie som pågår i miljön. I andra skeden kanske de studerande kan delta i någon datainsamling i klassrum eller om elever. Praxisnära forskning kräver tillgång till klassrum och elever och det har de studerande under sin praktik. Det här kräver att forskningsprojekten kan få lov att ta tid och vara utsträckta över en längre period. Om det kan genomföras blir studierna verkligen forskningsanknutna i ordets egentliga mening.

Att bli en forskande lärare

I många år har forskande lärare setts som ett mål. Så här skriver regeringen i propositionen:

Dagens skola ställer delvis nya och högre krav på lärarna och deras förmåga att analysera och utveckla ett tänkande om skolarbetets innehåll och uppläggning. Lärarna ska kunna välja ämnesinnehåll och göra innehållet begripligt samt kunna bedöma och värdera viss kunskap. Ju intensivare informationsflödet är desto viktigare blir skolans uppgift att vägleda eleverna till ett kritisk prövande förhållningssätt. Vidare måste lärarna kunna utvärdera sin egen verksamhet och dess resultat och elevernas kunskaper och arbetssätt. ett viktigt skäl till att stärka forskningen och

forskarutbildningen är att öka och bredda kunskaperna kring lärande och pedagogiskt arbetet så att läraryrket kan utvecklas. Därigenom kan skolan på ett bättre sätt möta det pedagogiska uppdraget. (sid. 37)

Lärare ställer andra frågor om sin verksamhet i skolan än forskare gör. Exempel på det har jag sett i de kompetensutvecklingskurser jag har haft under en lång rad år (Grevholm, 2002). När lärare får tid och resurser att genomföra undersökningar om sitt eget arbete med eleverna och dokumentera det i samverkan med forskare blir resultatet mycket intressant. Problemet är att lärare i Sverige sällan får den tid och de möjligheter detta kräver. I Japan har lärare tid för sådant utvecklingsarbete i sin tjänst. Japanska lärare kan i grupper arbeta fram undervisningssekvenser eller moduler och pröva ut dem (Stigler & Hiebert, 1999). Efter modifiering och ytterligare utprövning sprids dessa material till alla lärare i landet och på så sätt byggs en stor bas av väl utprovade idéer och material upp. Med lärare som har en beredskap att arbeta som forskande lärare skulle en sådan modell vara möjlig även i Sverige.

Det finns en del möjligheter för lärare att arbeta som forskare i sin egen verksamhet. Tidigare anslag för utvecklingsarbeten och stipendier har gett en del intressanta resultat (Grevholm, 2001 b). Möjligheterna till sådana anslag har nu utökats med att kommuner och vetenskapsrådets utbildningsvetenskapliga kommitté erbjuder resurser för forskning. Kommuner kan i samverkan med Skolverket finansiera så kallade lärardoktorander, som får tillfälle till forskarutbildning medan de kan behålla sin skoltjänst i reducerad grad. Regeringen har under 2001-3 satsat på utbildningsvetenskaplig forskning. Vetenskapsrådet har ansvaret för att satsningen genomförs och har för det utsett den utbildningsvetenskapliga kommittén. Kommittén ordnade i slutet av 2001 en konferens om Lärande och kunskapsbildning (Vetenskapsrådet, 2001) där ordföranden i kommittén betonade att önskan är att få till stånd ”en praktisknära forskning, som tar sikte på samhällets, skolans och lärarutbildningens behov – en nyfikenhetsdriven forskning som inte letar sig fram längs de förutsägbara vägarna.” (ibid, s 3)

Under samma konferens konstaterade Säljö (ibid, s 6) att lärarutbildningarna haft mycket lite praktisk kontakt med forskning och den attityd till kunskap som forskning representerar. Relativt få på lärarutbildningarna har haft egen forskarutbildning och följaktligen har inte heller de studerande fått levande kontakt med forskning. Säljö konstaterar också att lärarutbildningarna är spridda på många högskolor och för att ge forskningen tyngd och ge alla miljöer levande kontakt med forskning krävs samarbete. Här kan de nyinrättade forskarskolorna spela en mycket viktig roll.

Christer Bergsten (2001) tog på den nationella konferensen för lärarutbildare i matematik, LUMA, upp frågan om forskningsanknytningen av lärarutbildningen och gav en väl strukturerad överblick över vad forskningsanknytningen kan innebära och hur den kan realiseras. Emellertid måste diskussionen fortsätta och intensifieras bland lärarutbildare och samverkan måste utvecklas bättre för att nå upp till det Säljö pekar på.

Forskningsanknytning innebär en möjlighet till kvalitetshöjning av lärarutbildningen men den måste då bli en naturlig del av utbildningen och komma in på en mångfald olika sätt. För att nå dit krävs utbyte mellan lärarutbildare av goda konkreta idéer och utprovade aktiviteter.

Välkommen i SMDFs medlemsblad med inlägg i frågan.

Referenser

- Bergsten, C. (2001). Forskningsanknytning i lärarutbildningen. *SMDF medlemsblad, nr 4*, s 16-21.
- Dysthe, O., Hertzberg, F. & Hoel, T. Lökenstgard (2000). *Skriva för att lära*. Abstrakt forlag.
- Grevholm, Barbro (red) (2001a). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
- Grevholm, B. (2001b). Läraren som forskare i matematikdidaktik. I B. Grevholm (red), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*, s 257-274. Lund: Studentlitteratur.
- Grevholm, B. (2002). *Lärarutbildning*. Göteborg: NCM-Rapport 2002:1.
- Prop. 1999/2000: 135. *En förnyad lärarutbildning*. Stockholm: Riksdagens tryckeri.
- Stigler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.
- Vetenskapsrådet (2001). *Jakten på de spännande forskningsfrågorna*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

/ Barbro Grevholm

Matematiken i PISA

Denna vår är händelserik vad gäller utvärderingar av elevers matematiska kunskaper. Nationell utvärdering i skolåren 5 och 9, som är en repeatstudie av 1992 års utvärdering, kan hjälpa oss att studera kunskapsutvecklingen över tid. Ytterligare en internationell TIMSS-studie av 13-åringars matematikkunskaper äger också rum i vår. Denna artikel handlar emellertid om PISA-studien. OECD:s program för internationell elevutvärdering (PISA) är en regelbunden utvärdering av 15-åringars förmåga att vara förberedda för vuxenlivet. Den första undersökningsomgången skedde år 2000 i 32 länder i samarbete med ländernas regeringar och OECD (Skolverket, 2001). Då utvärderades läsförmåga, matematiskt och naturvetenskapligt kunnande. Läsförmågan var huvudämnet och det matematiska och naturvetenskapliga kunnandet utvärderades i liten utsträckning. År 2003 sker utvärderingen i 44 länder och matematiken är huvudämne och om tre år kommer naturvetenskapen att vara det. År 2003 har också ett nytt ämne införts i utvärderingen, nämligen problemlösning. Forskningsgruppen för bedömning av kunskap och kompetens (PRIM-gruppen) vid Lärarhögskolani Stockholm ansvarar för huvuddelen av arbetet i Sverige med utvärderingen i matematik och problemlösning.

Matematiskt kunnande definieras i PISA som förmågan att identifiera, förstå samt engagera sig i matematik och kunna göra välgrundade bedömningar av vilken roll matematiken spelar för en individs nutida och framtida privatliv, arbetsliv, sociala liv med släkt och vänner, samt ett liv som en konstruktiv, ansvarsfull och reflekterande medborgare. Målet med PISA är att se elevens kapacitet att integrera och tillämpa matematiska kunskaper och färdigheter i en mängd olika realistiska situationer. Ja, att kunna matematisera, dvs översätta ett problem till matematikens värld och därefter kunna strukturera och formulera problemet för att kunna lösa det. Detta innebär en förskjutning i synen på matematik vid internationella undersökningar, från att se matematik som en samling begrepp och färdigheter att bemästra till att förstå matematik som en meningsfull problemlösande aktivitet.

PISA har försökt att dela in det matematiska kunnandet i olika nivåer. I matematiken beskrivs tre olika nivåer. Elever som når den högsta nivån kan beskrivas som att de tar en aktiv och kreativ roll när de hanterar matematiska problem. De gör en matematisk tolkning, tolkar mer komplex information och hanterar ett antal olika steg. De använder relevanta verktyg och kunskaper,

demonstrerar insikt i att identifiera lämpliga lösningsstrategier och kan generalisera, resonera och argumentera för att förklara och kommunicera sina resultat.

Elever som når nivån närmast under kan tolka, sammankoppla och integrera olika framställningar av ett problem eller olika slags information. De kan använda en given modell som kan inkludera algebra eller annan symbolisk representation. Eleverna arbetar med givna modeller och strategier och de väljer ut och tillämpar relevant matematisk kunskap för att lösa en problemsituation som kan involvera ett smärre antal steg.

På den lägsta nivån är eleverna endast kapabla att utföra ett steg, som innehåller grundläggande matematiska fakta eller processer eller att tillämpa enkla räknefärdigheter. De kan endast hantera diagram och texter som är familjära eller där matematiken är uppenbar. De kan lösa och tillämpa rutinprocedurer i ett steg.

För att komma till konkreta uppgifter har PISA arbetat med tre dimensioner av matematiskt kunnande. Dessa är process, innehåll och kontext. Fokus ligger på processen, dvs hur eleverna kan analysera, resonera och kommunicera sina tankar när de formulerar och löser matematiska problem. Beträffande innehållet, så definieras det primärt som breda matematiska begrepp med underliggande matematiskt tänkande. Projektet arbetar därför med övergripande matematiska teman som bl a "tillväxt och förändring", "rum och form", "osäkerhet" och "kvantitativt resonemang". Med PISAs breda angreppssätt utvärderas matematiskt kunnande med "autentiska" uppgifter som baseras på situationer, ibland fiktiva, men som representerar olika problem som man kan möta i livet. Situationerna varierar med avståndet från individen; privatliv, skolliv, arbetsliv och fritid, lokalsamhället och samhället i stort och det vetenskapliga samhället.

För att kunna beskriva elevernas kompetens har uppgifterna delats in i olika kompetensklasser, beroende av vilket slags matematiskt kunnande som behövs för att lösa uppgifterna. Uppgifter som hamnar i den lägsta klassen, klass 1, utmärks av att de endast kräver lösningar som innebär att reproducera fakta, lösa rutinproblem och att kunna tillämpa standardalgoritmer. Nästa klass, klass 2, utmärks av att kunna se och använda samband mellan olika områden inom matematiken och att kunna integrera information för att lösa enklare problem. Denna kompetensklass återspeglar också elevernas förmåga att välja och utveckla strategier och att använda flera metoder och att tillämpa olika steg i den matematiska processen.

Den högsta klassen, klass 3, gäller ”matematikens och den matematiska förmågans hjärta”. Här måste eleverna kunna matematisera situationer, och kunna upptäcka och extrahera den matematik som finns i situationen. Förutom att kunna lösa uppgiften måste eleverna kunna analysera, tolka och utveckla mer originella modeller och strategier. De måste kunna använda matematisk argumentation som också kan inkludera bevis och generaliseringar. Denna kompetensklass inrymmer kritiskt tänkande, analys och reflektion. Eleverna ska kunna kommunicera sina matematiska tankar och idéer och även förstå andras matematiska kommunikation.

PISA utvärderar ungdomars matematiska kunnande genom olika typer av uppgifter allt från multiple-choice till mer öppna. Bedömningsanvisningarna är liksom för de andra ämnena mycket noga utformade och bedömningarnas reliabilitet (tillförlitlighet) kontrolleras på olika sätt både nationellt och internationellt. Det är mycket viktigt att elevlösningarna bedöms på exakt samma sätt i alla länder.

PISAs ramverk och de nationella styrdokumenterna (läroplaner och kursplaner) för den svenska skolan har olika syften, uppbyggnad och omfattning. Det dokument på nationell nivå som endast har med ämnet att göra är kursplanen men den finns i ett sammanhang med läroplan och skollag som överordnade dokument. I läroplanen för grundskolan skall varje elev efter avslutad grundskola ”kunna behärska grundläggande matematiskt tänkande och kunna tillämpa det i vardagslivet”. PISA-projektets ramverk har stora likheter i innehåll och anda med de sammantagna svenska dokumenterna.

Den ambition som ramverket för matematiken i PISA ger uttryck för har dock inte fullt ut slagit igenom i uppgiftsmaterialet. Uppgifterna är av mer traditionell typ och mer begränsande än vad ramverket ger uttryck för.

Skillnaderna mellan matematiken i PISA och matematiken i Sverige visar sig mer i det konkreta uppgiftsmaterialet och i hur utvärderingen genomfördes samt i hur elevlösningar bedömdes. Uppgiftstyperna skiljer sig en hel del. De nuvarande ämnesproven har i mycket liten utsträckning multiple-choice uppgifter, vilka är mer frekventa i PISA. De öppna uppgifterna som används i PISA har mer gemensamt med de gamla standardprovsuppgifterna än med uppgifterna i de nationella ämnesproven. Ämnesproven använder sig av uppgifter som är betydligt mer öppna än vad PISA gör. Olikheterna i uppgiftstyperna slår också igenom i bedömningarna. Vid ämnesproven används mer helhetsbedömning än PISA. Men ämnesproven och PISA har olika syften.

Ämnesprovets syfte är att stödja läraren i sin bedömning och betygsättning, att bidra till en likvärdig betygsättning i landet och att konkretisera den svenska läroplanens och kursplanens kunskapssyn respektive ämnessyn. PISAs syfte är att undersöka i vilken utsträckning femtonåringar är förberedda för vuxenlivet och rustade att möta framtidens behov, dvs vilken handlingsberedskap som ungdomarna har. I PISA får eleverna också besvara frågor om sitt intresse för matematik och sin självuppfattning.

Internationella undersökningar i matematik har förkommit sedan 1960-talet. I den första 1964 var de svenska elevernas genomsnittresultaten bland de lägsta (Murray & Liljefors, 1983). Undersökningen 1980 visade på samma resultat. Den tredje matematikundersökningen för 13-åringar, som ägde rum i mitten av 1990-talet visade på bättre resultat. Sverige var då ett genomsnittsländ (Skolverket, 1996). I PISA ligger de svenska elevernas kunskapsresultat signifikant över OECD-genomsnittet. Däremot har de svenska eleverna ett lägre intresse och självuppfattning i matematik än elever i många andra länder. I dessa avseenden ligger Sverige signifikant lägre än OECD-genomsnittet (Skolverket, 2001).

Referenser

- Murray, Å & Liljefors, R. (1983). *Matematik i svensk skola*. FoU rapport 46. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolverket (1996). *TIMSS. Svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Skolverkets rapport 114. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2001). *PISA 2000. Svenska femtonåringars läsförmåga och kunnande i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport nr 209. Stockholm: Skolverket.

Hemsida: www.pisa.oecd.org/

/ Astrid Pettersson

En reserapport från CERME 3

28 februari– 3 mars 2003 i Bellaria

För tredje gången anordnade ERME, the *European Society for Research in Mathematics Education* en konferens, CERME 3 under några vårdagar 2003. Den ägde rum i Bellaria, en typisk italiensk badort strax norr om Rimini i Italien. Konferensen pågick i fyra dagar, då deltagarna hade möjlighet att träffas och diskutera sin forskning. I anslutning till konferensen arrangerades en så kallad YERME-dag för unga forskare.

ERME vill med sina konferenser skapa ett forum för europeiska forskare i matematikdidaktik. Konferenserna skall ta till vara de olika forskningstraditioner som har vuxit fram i Europa. Arbetet sker inom arbetsgrupper med olika teman i syfte att stimulera kommunikationen mellan deltagarna. Däremot förekommer i princip inga plenarföreläsningar⁵ eller individuella föreläsningar. Varje arbetsgrupp leds av tre eller fyra gruppledare som organiserar arbetet enligt följande riktlinjer:

- De tar emot och läser artiklar från deltagare i gruppen
- De organiserar en verksamhet där deltagarna får läsa, reflektera och kommentera varandras artiklar (s.k. *peer-review*)
- De bestämmer, utifrån peer review-processen, vilka artiklar som kommer att diskuteras i gruppen och delar eventuellt in temagruppen i mindre grupper
- De strukturerar upp arbetet under de dagar som konferensen pågår
- De organiserar färdigställandet av gruppens material för konferensdokumentationen

Vid CEME 3-konferensen i Italien fanns det tretton olika arbetsgrupper. Från Sverige medverkade Christer Bergsten, Barbro Grevholm och Rudolf Strässer som gruppledare.

Inblick i arbetet i några arbetsgrupper

Vid anmälan till konferensen uppmantrades deltagarna att bidra med en artikel till en specifik arbetsgrupp. De som inte skickade in en artikel kunde, om de så

⁵ Den planerade plenarföreläsningen med Heinrich Bauersfeld ställdes in p.g.a. hälsoskäl. I programmet ingick en plenardebatt om relationen mellan teori och praktik i matematikdidaktisk forskning. Där medverkade Mariolina Bartolini Bussi, Christer Bergsten och Konrad Krainer. I debatten, som leddes av Barbara Jaworski, engagerades även åhörarna i ett grupparbete. En konferensdokumentation kommer att ges ut i form av en CD-rom.

önskade, visa upp sitt arbete i posterform. Vi fick i förväg, via internet, tillgång till samtliga artiklar för att kunna sätta oss in i de bidrag som ingick i den egna arbetsgruppen. Därigenom kunde deltagarna fokusera på andra aspekter under konferensdagarna. Vi deltog i fyra olika arbetsgrupper och vill med denna reserapport ge inblick i arbetet inom dessa. Redovisningen av arbetet i grupp 4 ger en mer utförlig beskrivning av arbetsgången i arbetsgrupperna. Här följer en sammanfattande redovisning från de grupper där vi medverkade. I anslutning till dessa redovisar varje doktorand en sammanfattning av sitt eget bidrag.

Grupp 4 *Argumentation och bevis*

Arbetet i den här gruppen leddes av Rudolf vom Hofe, Christine Knipping, Maria Alessandra Mariotti och Bettina Pedemonte. Gruppen hade som syfte att fokusera på följande områden:

- Vikten av argumentation och bevis i matematikundervisningen.
- Förhållanden som främjar argumentation och bevis i klassrummet.
- Utvecklandet av matematiska idéer relaterade till argumentation och konstruktion av bevis.

Swedish university entrants' experiences about and attitudes to proof and proving (Kirsti Nordström, Stockholms universitet)

Mitt bidrag handlade om en enkätundersökning som jag gjorde bland studenter som började studera matematik på hösten 2002 om deras attityder till, erfarenheter av och kunskaper om bevis. Studenterna visade positiva attityder och de flesta av dem hade velat lära sig mera om bevis i skolan. Deras lösningar av några bevisuppgifter tydde på en bristande erfarenhet av att arbeta med bevisuppgifter i skolan. Den här studien var ett första steg i en större studie som handlar om elevernas beviskultur i Sverige samt skillnaderna mellan skol- och universitetsmatematik angående bevis. Presentationen av bidraget ledde till en diskussion om likheter och skillnader av behandlingen av bevis i skolorna i olika länder. Efteråt bildades ett mindre nätverk för dem som var intresserade av matematikdidaktik på gymnasie- och universitetsnivåer.

Under november – januari (2002 – 2003) hade en granskning pågått då flera av oss hade läst och granskat två bidrag. Också min artikel blev granskad av två deltagare och jag fick många kritiska frågor och synpunkter under processen. Det var speciellt givande att brevväxla med Nadia Douek som hjälpte mig att utveckla mitt bidrag. Gruppledaren gjorde sedan den slutgiltiga granskningen samt bestämde om mitt bidrag blev accepterat eller inte. I början av februari skickades de 14 accepterade bidragen till alla deltagare (ca 20) vilka förväntades att ha läst dem före konferensen.

Bidragen delades i följande fyra temaområden:

- **Former och praxis av logiskt och matematiskt resonemang.** Dessa bidrag handlade om logiska, historiska och epistemologiska aspekter relaterade till matematisk argumentation och bevis samt terminologiska aspekter baserade på skillnader mellan förklaring, motivering, argumentation och bevis i matematikundervisningen.
- **Argumentation och bevis i klassrummet–jämförelse av olika klassrumskontexter.** I den här sektionen diskuterades olika klassrumskontexter där elever och studenter argumenterar, diskuterar eller konstruerar bevis. Genom att jämföra olika kontexter ökar förståelsen för betydelsen av olika sociala och kulturella miljöer för undervisningen om bevis.
- **Studenters förklaringar, kompetenser och erfarenheter av bevis.** Bidragen i den här gruppen handlade bland annat om kognitiva och epistemologiska aspekter angående produktion av gissningar och konstruktion av bevis.
- **Empiriskt tänkande och epistemologiska hinder för elevers argumentation och konstruktion av bevis.** I den här sektionen diskuterades matematiska aspekter av verklighetsrelaterat tänkande, empiriskt resonemang och epistemologiska hinder för elevers argumentation och konstruktion av bevis.

Varje deltagare som hade fått sitt bidrag accepterat fick förbereda en kort presentation där de hade möjlighet att fokusera på vad de tyckte var viktigt eller problematiskt. Efter presentationen hade gruppen möjlighet att ställa kritiska frågor och/eller ge förbättringsförslag eller bara diskutera ämnet.

Förutom dessa diskussioner organiserade David Reid från Kanada ett grupparbete kring en videoinspelning där de metodologiska och teoretiska frågorna diskuterades utifrån de perspektiv som tillämpades i olika bidragen. I vilken utsträckning reflekterar/inte reflekterar resultaten av våra empiriska studier studenters erfarenheter? Hur påverkar våra metoder (flervalsfrågor, öppna uppgifter, intervjuer, klassrumsobservationer osv.) studenters uppförande, svar och förklaringar? Hur kan våra resultat påverka undervisningen eller lärarutbildningen?

För mig var det värdefullt att få vara med i granskningsprocessen, läsa alla bidragen, diskutera och lyssna på erfarna forskare. Jag hade också möjlighet att knyta kontakter med forskare med samma intressen.

Artiklarna till temagruppen *Argumentation och bevis* återfinns i fulltext på internet under adressen:

http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG4/TG4_list.html

Grupp 5 *Stokastiskt tänkande*

Arbetet i den här gruppen leddes av Dave Pratt, Carmen Batanero, Rolf Biehler och Michael Henry. Gruppen hade som syfte att fokusera på bland annat följande områden: stokastiskt tänkande som inkluderar sannolikheter, statistik och gränssnittet mellan dessa områden.

Experimentation As A Tool For Discovering Mathematical Concepts Of Probability (Per Nilsson, Växjö universitet)

Min artikel fokuserar på studenters förmåga att hantera komponenter av sannolikhet medan de agerar i situationer av osäkerhet i en experimenterande miljö.

Särskilt intresse är riktat mot i vilken utsträckning elever i år 7 kan utveckla sekundära intuitioner av sannolikhet genom interaktion via matematisk modellering. Dessa intuitioner kommer från lärande och är kopplade till formell kunskap. För att stimulera denna typ av lärandesituation, innehållande komponenter av slumpmässighet och sannolikhet, designades ett tärningsspel som bygger på oberoende och sammansatta händelser, nämligen summan av två tärningar. Situationen är i sin tur uppdelad i fyra olika delar där varje del har sin speciella uppsättning av tärningar i syfte att stimulera olika delar av den matematiska ansatsen.

Ur analysen över elevernas modelleringsstrategier finner vi att variationen i design både stödjer identifiering av primära intuitioner, speciellt att de fördelar utfall likformigt (på engelska: equiprobability bias), som att styra eleverna mot att abstrahera grundläggande sannolikhetsbegrepp. Även om sådana abstraktioner inte omedelbart går att identifiera som stabila och automatiserade intuitioner så ger situationen en kvalitativ inblick i elevers agerande under osäkerhet och på det sätt designen stimulerar tänkandet mot en matematisk struktur med avseende på:

- Kontroll av utfallsrum
- Stokastiskt oberoende
- Jämförelse av sannolikhet för sammansatta händelser
- Bestämmande av sannolikhet utifrån frekvenser

Därför vill vi trycka på vikten av aktivt lärande, där elever ställs att lösa problem som innehåller, och på så vis stödjer ett utvecklande av, nämnda sekundära intuitioner i syfte att utveckla ett mer matematiskt förhållningssätt till situationer av sannolikhet.

Artiklarna till temagruppen *Stokastiskt tänkande* återfinns i fulltext på internet under adressen: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG5/TG5-list.html>

Grupp 6 *Algebraiskt tänkande*

Arbetet i den här gruppen leddes av Abraham Arcavi, Lucianna Bazzini, Catherine Sackur och Pessia Tsamir. Gruppen hade som syfte att bland annat fokusera på följande områden:

- Utvecklingen av elevernas algebraiska begreppsbyggnad
- Algebraiskt tänkande
- Användandet av olika representationsformer vid arbete med algebraiska uppgifter

Planeringen av arbetet i denna grupp följde inte till alla delar de angivna direktiven. Det förekom ingen "review process" mellan deltagarna. De artiklar som hade lämnats in indelades i fyra undergrupper beroende av innehåll. I anslutning till varje artikel hade gruppledarna, i förväg, formulerat en frågeställning som skulle vara utgångspunkt för diskussion om respektive artikel. Det blev tyvärr ingen diskussion utifrån dessa frågor. I stället blev det en fri diskussion i helgrupp (ca 40 deltagare) där innehållet styrdes av ett fåtal deltagare. Större delen av tiden ägnades åt diskussioner om generaliserad aritmetik, algebraiska strukturer och modellering. Tyvärr innebar detta att vi som lämnat in artiklar inte fick feedback på dessa.

Artiklarna till temagruppen *Algebraiskt tänkande* återfinns i fulltext på internet under adressen: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG6/TG6-list.html>

Undergrupp 3: Representationer, kontexter, modellering

Analyzing algebraic thinking in written solutions (Teresia Jakobsson-Åhl, Luleå tekniska universitet)

Frågeställning till denna artikel: Hur kan algebraiska metoder utveckla geometrisk kunskap och vice versa. Kan illustrationer i en uppgift utveckla/hindra den symboliska kompetensen?

Jag har formulerat en modell med vars hjälp jag avser att analysera algebraiskt tänkande i gymnasieskolan. Min modell mäter tänkandet på två nivåer. En "global nivå" där jag bedömer elevens sätt att angripa en uppgift och en "lokal nivå" där jag analyserar lösningen steg för steg. Till den lokala nivån har jag formulerat kriterier för olika slag av algebraiskt tänkande. Aspekter som jag beaktar vid min analys är till exempel förmågan att kunna identifiera och namnge variabler, i en situation, kunna tänka i termer av beroende och oberoende variabler, strukturellt tänkande och att kunna tolka resultatet av olika beräkningar till en verklig situation. När jag utför en analys använder jag mig av förkortningar. I mitt bidrag presenterade jag en "a priori analysis" där jag använder modellen för att undersöka två elevers lösningar av en specifik uppgift. Den ena eleven (elev 1), har betyget Godkänd medan den andra (elev 2) har betyget Väl godkänd. Jag redovisar inledningsvis olika tänkbara lösningsmetoder för uppgiften. Den globala analysen visar att båda eleverna angriper problemet med samma metod. De utgår från den bild som illustrerar uppgiften. Den lokala analysen visade däremot att elevernas algebraiska tänkande var olika. Elev 1 använder sig av egna symboler: en sträcka betecknas med $D \rightarrow M = x$ och uttrycker algebraiska symboler med tal. Eleven anger att svaret för uppgiften är en formel. Elev 2 använder vedertagna symboler och beskriver exempelvis relationerna mellan de ingående variablerna med en funktion. Detta indikerar att eleven använder ett annat slag av algebraiskt tänkande än elev 1.

Undergrupp 4: Intressanta (men mindre vanligt förekommande) ämnesområden i algebra

Algebra in upper secondary school a study of teachers' teaching and student learning (Costanta Olteanu, Högskolan i Kristianstad)

Frågeställning till denna artikel: Är studenternas vanliga syntaktiska svårigheter ett hinder under gymnasietiden? I vilken utsträckning och varför? Hur bör lärarens roll vara för att kunna studera och klara av dessa svårigheter?

Jag skrev min artikel tillsammans med Barbro Grevholm och Torgny Ottosson. Syftet med mitt forskningsprojekt, som i artikel presenterades kortfattat, är att förbättra mina kunskaper om gymnasieelevers tankeutveckling inom algebra och lärarens roll i algebraundervisningen. För att prova en preliminär design för datainsamling gjordes en pilotstudie. I detta bidrag ville vi diskutera pilotstudien och hur designen kan förbättras för den kommande huvudstudien. Vi gav exempel från våra data och diskuterade några preliminära resultat och möjliga designförbättringar.

Grupp 8 *Sociala interaktioner i den matematiska lärsituationen*

Arbetet i den här gruppen leddes av Goetz Krummheuer, Mariolina Bartolini Bussi, Marit Johnsen Høines och Alison Price. Gruppen behandlade även situerat lärande och studien av klassrummet som en social plats för lärandet.

Jag (*Andreas Andersson*) deltog i gruppen som inriktade sig på interaktion och klassrumsforskning. Mina intressen rör kommunikationen mellan ingenjörstudenter och jag presenterade min forskning i posterform. Det presenterades totalt ett femtiotal poster på konferensen. Posterpresentation är ett avslappnat och trevligt sätt att berätta om sin forskning och jag knöt flera viktiga kontakter under evenemanget.

Gruppdiskussionerna inriktades företrädesvis på teoretiska bakgrunder. Speciellt fokus lades på problematiken att på ett teoretiskt plan behandla individuellt lärande i förhållande till i vilken kontext dessa sker. Av gruppmedlemmarnas bidrag var alla, utom mitt eget, inriktat på barn i grundskolenivå vilket ger en fingervisning att fler studier på den lite högre nivåerna i utbildningssystemet behövs.

Artiklarna till temagruppen *Social Interactions in Mathematical Learning Situations* återfinns i fulltext på internet under adressen:
<http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG8/>

YERME-dagen

YERME, *Young European Researchers in Mathematics Education*, fungerar som ett forum för unga forskare där de kan få kontakt och utbyta erfarenheter med varandra. Dagen före själva konferensen organiserade YERME en heldag med aktiviteter. Vid anmälan till denna fick deltagarna välja vilka diskussions- och arbetsgrupper de ville medverka i. Flera väletablerade forskare fungerade som ledare för diskussions- och arbetsgrupperna. Förmiddagens diskussionsgrupper ägnades åt tillkomst och formulering av forskningsfrågor, hur vetenskapliga artiklar och avhandlingar läses respektive skrives och metodologiska frågor. Eftermiddagens arbetsgrupper handlade om jämförelse mellan metodologin i olika länder, om möjligheten att skapa kvantitativa och kvalitativa normer i matematikdidaktik och lärarpraktik. Dagen avslutades med en session där framtiden för YERME diskuterades. Vid detta tillfälle utsågs Andreas Andersson som representant i programkommittén. Det beslutades bland annat att en YERME-dag skall ordnas i anslutning till ICME 10 i Köpenhamn nästa år.

Några reflektioner

Många nya kontakter knöts under de intensiva dagarna i Bellaria. Föredrag, arbetsgrupper och kringarrangemang fick ett mycket positivt mottagande av deltagarna.

Eftersom Andreas Andersson numera ingår i programkommittén för YERME har vi en unik möjlighet att påverka programmet för nästa YERME-dag. Du som har idéer om ett intresseområde kan komma med förslag till Andreas.

Det var mycket inspirerande och lärorikt att delta i denna konferens. Med denna reserapport vill vi därför uppmana er, som ännu inte besökt en konferens av detta slag, att delta i CERME 4, som går av stapeln i Barcelona om två år.⁶

Andreas Andersson

Teresia Jakobsson-Åhl

Per Nilsson

Kirsti Nordström

Constanta Olteanu

⁶ Den internationella programkommittén för CERME 4 leds av Barbara Jaworski. Medlemmar i övrigt är Abraham Arcavi, Christer Bergsten, Rita Borromeo Ferri, Marianna Bosch, Jean-Luc Dorier, Nuria Gorgorio, Joao Pedro Ponte, Heinz Steinbring, Nada Stehlikova, Ewa Swoboda och Rosetta Zan. För den lokala organisationen ansvarar Marianna Bosch.

Senaste nytt från ***Forum for matematikkens didaktik***

Måndagen den 14 april försvarade Bettina Dahl Söndergaard sin avhandling *A focus group study of Danish and English high-achieving high school pupils of mathematics* vid Center for forskning i matematikläring, IMFUFA vid Roskilde universitetcenter.

Hur berättar högpresterande gymnasieelever om hur de lär sig ett begrepp som är nytt för dem? Hur kan dessa förklaringar analyseras utifrån olika psykologiska inlärningsteorier om matematik? Det var huvudfrågorna i Bettinas avhandling. Projektet finns beskrivet på danska i skriftserien från *Center for forskning i matematikläring*, skrift nr 37, *Hvad kan vi lære om de kognitive processer i matematik ved at spørge dygtige gymnasieelever?*

I Forums tidskrift nr 1 årgång 7 ges en resumé av doktorsavhandlingen *Reform, democracy and mathematics education* av Paola Valero vid Aalborgs universitet. Undersökningen för samman tre fält för uppmärksamhet: 1) reformer och förändringar i matematikundervisning och lärande, 2) hur ändringar i matematikundervisningen inom skolans organisation kan förstås och 3) frågan om hur forskning kan genomföras från ett sociopolitiskt perspektiv. Målet med Paolas forskning är att omformulera uppfattningen av The Institutional system of mathematics education (ISME). Hon ser ISME som en modell som förklarar hur matematikundervisning och lärande fungerar inne i själva skolan som ett system. I det systemet intervenerar tre typer av aktörer: skollärdarna, gruppen av matematiklärare och läraren som en individuell person. En fråga som ställs är: Är ISME som idé en lämplig utgångspunkt för undersökningar av den komplexitet som faktiskt finns i en skola i förhållande till matematikundervisning och lärande? Kan denna teori utifrån ett sociopolitiskt perspektiv utvecklas ytterligare för att förklara hur systemet fungerar när uppmärksamheten riktas mot den demokratiska aspekten i en matematikundervisning i förändring? Teoretiseringsprocessen sattes igång genom tre fallstudier. En gjordes med elever i en dansk folkskola, en från 6-12-klassen i Sydafrika och en i en skola för samma åldersgrupp i Colombia. Från fallstudierna kom det fram grupper av problemområden som måste ses som centrala element i en omformulering av ISME. Dessa är undervisningskontextens betydelse, eleverna som ett element i ISME, den roll skollärdarna spelar i ändringen av matematikundervisningens praktik, hur gruppen av matematiklärare fungerar på skolan samt matematik-

lärarens roll i klassen. Baserat på det presenteras ett *Network of school mathematics education practices*, som ett medel att förstå komplexiteten av den sociala praktik genom vilken läraren, elever och ledare i skolan genomför undervisningen i skolan. Avhandlingen försvarades den 28 mars vid Danmarks Pedagogiska Universitet.

I samma nummer av Forums nyhetsbrev presenteras också delar av innehållet vid Nyborgskonferensen med fyra föredragshållare och 42 deltagare. Mogens Niss talade om Evaluering av kompetenser med utgångspunkt från rapporten Kompetenser och matematiklärande, som vi tidigare berättat om i SMDFs medlemsblad. Lene Østergaard Joahnseon från Aalborgs universitet föreläste om Hvordan evalueres voksnes regnefærdigheder og voksnes numeralitet? Sören Antonius fokuserade på Autencitet och nya evlueringsformer och berörde den avslutande utvärderingen av gymnasieutbildning. Henrik Bang och Claus Larsen redovisade ett forsknings- och utvecklingsprojekt under rubriken *Udvikling af undervisningen i matematik og fysik på overgangen fra folkeskole til gymnasium*.

Intresserade SMDF medlemmar rekommenderas att ta del av de utförliga och intressanta sammandragen av föreläsningarna som finns i Forums nyhetsbrev. Kontakt sker enklast genom att maila till Forums ordförande Lisser Rye Ejersbo på adressen lisser@dpu.dk

Från Forums årsberättelse framgår att medlemsantalet är oförändrat, att tre matematikdidaktiska fora har avhållits, där deltagandet kunde varit större och att ekonomin är god, vilket leder till att samma aktivitetsnivå som förut kommer att bibehållas.

DEBATTFORUM

Två debatter angående matematikens innehåll och språk

Två debatter om matematikens natur utspelade sig 24 februari på CTH och 24 mars på KTH mellan *Håkan Lennerstad*⁷ och *Ulf Persson*⁸. Temat var matematikens innehåll och språk. Är det meningsfullt att betrakta de två som skilda kompetenser för elever och forskare? Som två komponenter av matematiken med starkt skilda egenskaper? Vilken betydelse skulle detta synsätt ha för matematikutbildningarna, om någon?

Debatterna har föregåtts av artiklar i matematikersamfundets medlemsblad. De två debatterna hade samma format. Först hade Håkan Lennerstad en inledning, följt av Ulf Perssons inledning. Inledningarna följdes av debatt mellan oss två, vilken följdes av debatt med auditoriet.

På CTH deltog ca 50 personer, på KTH ca 25. Närvarande var professorer, lektorer, doktorander och studenter. Tillställningarna tog ca två timmar, och många fortsatte att vända på stenarna efteråt. I båda fallen blev debatterna livliga, med god stämning och med aktivt deltagande från auditoriet. Det föreföll tydligt att frågor väcktes som är komplexa och intressanta för många. Detta har också viss principiell betydelse med tanke på att vetenskapens sanningar ytterst vilar på det kritiska tänkandets vitalitet.

Det kan noteras att vid båda debatterna yttrades åsikterna att vi inte var så långt ifrån varandra ändå, och att det vore intressant att se exempel på konkreta undervisningssituationer där våra attityder skulle ge skilda resultat.

På CTH deltog Sven-Eric Liedman, professor i idé- och lärdoms historia. Han har uttryckt intresse i synnerhet för det matematiska innehållets karaktär. Flera av de närvarande beskrev innehållet som bilder och intuition som ofta är starkt personligt, och matematikens formelspråk är plats där individernas intuitioner kan mötas, jämföras och utvecklas. På detta sätt representerar det språkligt formulerbara en minsta gemensamma nämnare för våra personliga intuitioner.

⁷ Docent i tillämpad matematik vid BTH (Blekinge tekniska högskola)

⁸ Professor i matematik vid CTH (Chalmers tekniska högskola)

På KTH var Jockum Aniansson en kraftfull moderator som förmådde oss att exemplifiera vad vi talade om. Från en exempelkalkyl framväxte en diskussion om att en formell kalkyl också kan betraktas som en form av spel. En student i auditoriet beskrev att han upplevde att matematikkurser ofta var mycket olika: vissa hade utpräglad språklig (formell) betoning, och andra utpräglad innehållsbetoning. Denna tudelning beskrevs och diskuterades även av flera lärare.

Nedan fortsätter vi i denna text våra debatter, med våra respektive sammanfattningar av debatterna.

Håkan:

”Ulf och jag hade olika fokus. Jag hade mera fokus på hur studenter och forskare (människor) förstår och arbetar med matematik, medan Ulfs fokus är i högre grad matematikens struktur.

Dock har de flesta ställningstaganden som jag gjort, även angående matematikens natur, förblivit hängande i luften, obestridda och t.o.m. okommenterade. Det gäller exempelvis om vi upptäcker innehållet och uppfinner språket, men framförallt det centrala påståendet att språk har en naturlig osynlighet för oss lärare. En hypotes som Ulf tycks bestrida är att det finns personer som klarar att räkna med formalismen men inte förstår innehållet, och personer som lyckas lösa många typer av problem men inte kan skriva sina lösningar på ett korrekt sätt. Eller kanske Ulf bestrider att detta är någon form av matematiska kompetenser. Vid debatterna har många personer känt igen dessa skilda kompetenser hos studenterna.

Jag menar att vi sysslar med *väsentligt olika sorters tänkande* när vi försöker få språket att fungera och när vi försöker ta reda på eller bevisa vad som är sant. Språkfrågorna är ofta enkla eller triviala för matematiklärarna, men inte för många elever/studenter. Det kräver en särskild språkmedvetenhet hos lärarna.

Språks struktur är dessutom naturligt osynliga. Varje tonåring kan tala en hel del på sitt modersmål utan att veta någonting om detta modersmåls struktur. En tonåring som envist försöker lära ut sitt språk till en icke språkkunnig kan upptäcka denna struktur. Denne upptäcker ofta samtidigt hur påtagligt okunnig man är om strukturen för det språk, som annars är så välbekant.

Språks osynlighet är en huvudorsak till att språkfrågan är så underskattad i matematik. Det finns inte ens något vedertaget namn för matematikens

formelspråk – jag föreslår ”matematiska”. Dess grammatik är knappast alls formulerad, trots att man sysslar med den i årtal och att dess grammatiska struktur är mycket annorlunda än naturliga språks. Det består av konventioner samt av logiska samband som vi använder regelmässigt.

Jag menar att matematiken består av vad som är gemensamt, nämligen det formulerbara. Detta är språkligt/formellt – det är inget problem att vi har olika tolkningar av det. Det matematiska innehållet är vad som antyds av den formella matematiken. Innehållet kan endast nås genom att ringas in från så många synvinklar som möjligt. Formelspråkets är i en viss mening den viktigaste synvinkeln, men kan inte vara den enda.

Ulf, liksom traditionen, bortser helt enkelt från de mycket specifika egenskaper som språk och i synnerhet matematiskan har i relation till innehållet. Han tycker det är onödigt att formulera dem, han tyckes anse det blir svårare (mer komplicerat!) om språket är under medveten kontroll. Hans huvudargument angående matematiskan tycks vara att man lär sig det naturligt förr eller senare, och att det är för komplicerat för att det ska vara någon idé att förklara det. Många åhörare uttryckte emellertid igenkännande för matematikens två sidor, språk och innehåll, från sin verksamhet.

Ulf framhåller, vilket jag håller med om, att man gör kalkyler med matematiska, vilka inte har direkta motsvarigheter vid språkanvändning. Språket får då (när man inte tolkar) karaktären av ett spel (Ulfs benämning): använd denna uppsättning regler för att finna starkast möjliga resultat. En regel får under detta spel en karaktär som inte mycket liknar dess tolkningar (betydelser) eller dess ursprungliga form. Detta gör det ännu viktigare att tydligt formulera spelets regler, vilka består både av rena beteckningskonventioner och av logiska sanningar som används på rent regelmässiga sätt.

Jag hävdar att lärarna tänker på innehållet och använder formelspråket (det är karaktäristiskt för språk i allmänhet). Men studenter som inte förstår språket ser inte innehållet, de fastnar på språket. De kan inte använda matematisk kunskap från andra områden på grund av att de inte känner igen sig i matematiskan, och inte vet vilka regler som gäller här.

Eftersom lärarna inte tänker på språket och dess struktur, de tänker på innehållet, har studenterna problem med att lära sig matematiskan. Om lärarna tänker mer på språket och blir mer medvetna om det, så kan studenters bättre kunskaper i matematiska (en aning paradoxalt) göra språket blir mer genomskinligt och att studenterna ser innehållet bättre. Språket är ett huvudverktyg för observation.

Man måste förstå hur det fungerar, det förtjänar definitivt egen uppmärksamhet. Det gäller inte minst matematik.

Jag föreslår två ”patentmediciner” mot språksyndromet. Det första är regelbundna och detaljerade *översättningar* av matematikformler till svenska. Dvs, samma innehåll är skrivet på två sätt: matematiska och svenska. Detta har två poänger. För det första blir det lättare för de lärande att se innehållet (eller rättare: någon bild av det), ty de förstår vanligen svenska bättre än matematiska. För det andra demonstreras formelspråkets funktionssätt genom detaljerna i översättningarna.

Här är ett mycket enkelt exempel. Att ofta översätta ”=” med (t.ex.) ”har samma värde som” kan få lärande att i mindre grad uppfatta ”=” som ”vilket ger”. Dvs, att inte missuppfatta likhetstecknet endast som en sorts markering av riktningen i räknandet. Detta är också ett exempel på att översättningar av matematiska formler lätt leder till diskussioner av vad som försiggår i matematik. En sådan översättning har en matematikhistorisk koppling. Walesaren Robert Recorde introducerade 1557 likhetstecknet med motiveringen:

’And to avoide the tedious repetition of these woordes ‘is equal to’ I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe [twin] lines of one lengthe, thus: bicause noe 2 thynges can be moare equalle.’

En översättning är ofta en förklaring som i hög grad följer den matematiska formeln. (Detta klargjordes vid Göteborgsdebatten). Detaljrikedomen är viktig för att ge exakta och korrekta kunskaper både om betydelse och hur en formel fungerar. Jag menar att undervisningstraditionen är alldeles för slapp och otydlig i sitt sätt att förklara de matematiska formlerna, som ju spelar en så central roll i ämnet.

Översättningar stimulerar ofta dialogen mellan lärande och lärare. För att förstå kalkyler som exempelvis $33 + 196 = 29 + 200 = 229$ måste man känna frihet att prova och leka med symbolerna – det är centralt för att utveckla känsla för innehållet bakom och vilka språkliga regler som faktiskt gäller. Detta hänger starkt ihop med förekomsten av fria verbala dialoger om matematik.

Den andra patentmedicinen är *metaforer*. Dessa antyder innehållet utan formelspråk. Ett typiskt exempel är fallande dominobrickor som metafor för induktionsbevis. Vi behöver finna träffande metaforer i alla matematiska

sammanhang. Tillämpningar är något annat. De ger motivation, men visar sällan hur matematiken formulerar. De klargör sällan de matematiska svårigheterna.

Jag tycker det är en på många sätt meningslös förhoppning att alla studenter kan lära sig matematik, eller ha ett intresse för matematik. Men jag tror att vi utestänger stora grupper elever/studenter som är intresserade av matematik genom dagens alltför begränsade syn på vårt ämne och hur det fungerar. Lärarens uppfattning om matematikens natur har stor relevans för vad som händer i klassrummet.”

Ulf:

”Det frustrerande med de bägge debatterna har varit det oproblematiska och vaga sätt som begreppet språk har behandlats. Detta har gjort det svårt att dra skiljelinjer och att bemöta ståndpunkter. Många av åhörarna har frågat sig vari skillnaden mellan våra ståndpunkter legat, och den paradoxala situationen har uppstått där Håkan har hållit med mig, medan jag inte hållit med honom! Om man använder språk i den vida betydelsen att kommunicera, så reduceras alla påståenden till truismer. Givetvis är det klart att vi skall försöka kommunicera effektivare med eleverna, och det vore mycket bra om vi kunde få dem att förstå vårt språk bättre. Vi måste förklara på ett mera levande sätt och presentera fyndiga och upplysande metaforer. På denna nivå så finns det ingen anledning att inte hålla med Håkan. Vi kan ju även hävda att vi måste älska våra elever mera, och får de bara tillräckligt mycket kärleksfull omtanke från oss, så kommer det att förstå matematiken bättre, eller åtminstone bli lyckliga människor, och det senare är inte fy skam det heller.

Om man däremot går in i detalj med vad Håkan menar, så blir man mer betänksam. Håkan tycks identifiera det matematiska språket ('matematiskan' i hans fyndiga terminologi) med det formella språket. Formelspråket vars yttersta syfte är kalkylen är mycket väsensskilt från den naturliga språket. De likheter som föreligger är ytliga och missvisande. I formelspråket är reglerna obönhörligt logiska och de är till för att dogmatiskt tillämpas. I det naturliga språket finns det visserligen grammatiska regler, men dessa är efterhandskonstruktioner, som visserligen kan ha ett visst normerande värde, men som snarare utgör ett hinder än ett stöd när man brukar ett språk. I språk är reglerna inte logiska, och den yttersta auktoriteten är inte hur väl en text lyder grammatiska regler, utan hur helt enkelt hur den 'låter'. (Det är ingen svårighet att framställa grammatiskt korrekta texter som dock ej är idiomatiska i en djupare mening). Detta betyder att när man gör kalkyler (uträkningar, algebraiska manipulationer) så ägnar man

sig inte åt att 'tala matematiskan', utan detta är en verksamhet som inte har någon motsvarighet i vardagsspråket. (Visserligen kan man 'översätta' formelspråket och manipulationerna till vardagsspråket, men vad som framkommer är då en beskrivande gallimattias som inte gör någon varken glad eller upplyst.) Det är således gravt missvisande att tala om de individer som kan utföra manipulationer utan att egentligen förstå såsom språkligt kompetenta.

Matematiken är en mänsklig verksamhet som förmedlas av ett berättande vardags-språk, då och då avbrutit av formella manipulationer (uträkningar). Detta språk innehåller många främmande ord, men dessa ord kan inte översättas till vardagsspråket ty detta saknar ord för dessa begrepp. För att förstå det så kallade språk i vilket matematiken presenteras måste man förstå de matematiska begreppen. Man tillägnar sig matematiska begrepp, och som en följd av denna krävande process tillägnar man sig av bara farten ord för dessa begrepp. Vad som är centralt i all matematiskt inlärande är att anamma matematiken, språket är en bisak. Om man inte förstår språket är det för att man inte förstår matematiken bakom. Det finns inga genvägar till den matematiska förståelsen, det är endast i undantagsfall en ändring av notationen eller en förklaring av en annorlunda konvention i användandet av ett vardagsord, som fjällen fås falla för synen.

Håkan hävdar att liksom det finns matematiskt språkkunniga elever som kan formulera formler utan att veta vad dom gör, eller än värre, varför dom gör det överhuvudtaget, så finns det även elever som är helt inriktade på matematikens innehåll, utan att ha förmågan att kunna kommunicera via matematiska formler. När det gäller den senare kategorin är jag nyfiken på dokumenterade exempel. En klipsk skolelev kan visserligen lösa elementära matematiska problem utan att ställa upp ekvationer, men genom att tänka ad hoc. Dock så har jag svårt för att tro att just dessa elever som lyckas klara av uppgifter utan att kunna redogöra för hur de burit sig åt, skulle utgöra ett större problem. Min misstanke är att dessa elever förr eller senare naturligt tillägnar sig det matematiska formelspråket, ty behovet av det kommer att växa sig så stort, att de knappast kan värja sig! Detta är givetvis spekulation från min sida, vad som behövs är empiriskt material. Jag skulle vilja föreslå Håkan och intresserade didaktiker att dokumentera sådana fall. Ge exempel på elever som visserligen kan lösa tal, i den meningen att de kan prestera rätt svar, men som ställer sig helt främmande till matematiskt vedertagen terminologi, och som är oförmögna att själva redogöra för sitt tänkande och sina metoder. Vidare skulle jag vilja se exempel på tester, dels utformade i matematiskt språk, dels utformade i så kallade översättningar till

vardagsspråket; och dokumentation av att fler elever lyckas lösa det senare testet än det förra.

Det stämmer att Håkan och jag har olika perspektiv. I Håkans fall dominerar det praktiska, han drivs av en uppriktig önskan att kommunicera matematiken till sina elever, driven av en övertygelse om att matematikens väsen och rikedom är i princip tillgängliga för var och en, och vad som ligger i vägen måste vara något som bör kunna undanröjas. Kan man bara identifiera vari knuten ligger, så kan man knäcka koden, och koden i detta fall är helt enkelt 'språket'. Detta leder Håkan till att formulera ett antal filosofiska teser, vilka jag finner både naiva och missvisande. Matematiken, liksom så många andra mänskliga verksamheter är för mig ett stort mysterium, liksom processen att tillägna sig dem. Matematiken är mer än formalism, och däri är både Håkan och jag rörande överens, men medan Håkan i sina specifika rekommendationer koncentrerar sig på knäckningen av den formalistiska koden, anser jag att matematiska insikter inte kan överföras genom instruktion allena, utan vad som gör all matematisk instruktion (liksom all instruktion överhuvudtaget) möjlig är förmågan hos eleven att förstå den bakomliggande intentionen, en intention som alltid är underförstådd och som aldrig kan helt göras explicit (ty detta skulle leda till en så kallad oändlig regression). Det är förståelsen av intentionen som gör att matematisk terminologi, liksom språk, kan fungera fastän allt är inte uttryckt. Det är intentionen och sammanhanget som får oss att förstå att likhetstecken betyder olika saker i olika situationer fastän det betecknas med samma tecken. Att introducera säg trettiotvå olika likhetstecken för att i möjligaste mån synliggöra dessa distinktioner, vore att göra all matematisk undervisning oigenomtränglig och förvirrande, och ett säkert recept att ta död på allt intresse.”

/ Håkan Lennerstad & Ulf Persson

E-postdresser till medverkande i *Medlemsblad* nr 7:

Andreas Andersson	andreas.andersson@mdh.se
Barbro Grevholm	barbro.grevholm@staff.hkr.se
Teresia Jakobsson-Åhl	teresia@sm.luth.se
Håkan Lennerstad	hakan.lennerstad@bth.se
Per Nilsson	per.nilsson@msi.vxu.se
Kirsti Nordström	kirsti@matematik.su.se
Constanta Olteanu	cou@chapman.karlskrona.se
Ulf Persson	ulfp@math.chalmers.se
Astrid Pettersson	astrid.pettersson@lhs.se
Rudolf Strässer	rudolf@sm.luth.se

Anslagstavlan

Aktuella konferenser

Nordic pre-conference to ICME 10, Växjö 9-11 maj 2003

<http://www.msi.vxu.se/picme10>

PME 27, Hawaiï 13-18 juli 2003

<http://www.hawaii.edu/pme27>

Andra Nordiska konferensen om matematiksvårigheter, Örebro 7-9 oktober 2003. http://www.oru.se/org/inst/pi/konferenser/matematik_7_9_okt.htm

ICME10 (The 10'th International Congress on Matematical Education), Köpenhamn 4-11 juli 2004. *Second announcement* finns snart tillgängligt på <http://www.icme-10.dk>

Telefoner och e-postadresser till funktionärerna i SMDF:s styrelse 2002

Ordförande	Barbro Grevholm	044-203427	barbro.grevholm@staff.hkr.se
Vice ordförande	Christer Bergsten	013-282984	chber@mai.liu.se
Kassör	Thomas Lingefjärd	031-7732253 031-7724994	thomas.lingefjard@ped.gu.se tholing@math.chalmers.se
Sekreterare	Astrid Pettersson	08-7375644	astrid.pettersson@lhs.se