SMDF

Svensk Förening för **M**atematik**D**idaktisk **F**orskning

MEDLEMSBLAD

Nr 5

Juni 2002

INNEHÅLL

Medlemsblad nr 5	1
Några rader från ...(*Barbro Grevholm*)	2
Mats Martinsson död (*Barbro Grevholm*)	5
Personliga reflektioner kring matematikdidaktiken som vetenskap (*Ole Björkqvist*)	7
Vi skriver y = x + 5. Vad betyder det? (*Barbro Grevholm*)	17
Samtal som metod för utveckling av lärarutbildning och didaktisk forskning (*Christer Bergsten*)	37
Intrykk fra *SMDF*'s konferanse *MADIF3* (*Ingvill M. Holden*)	45
Några tankar från *MADIF3 – Forum för unga forskare* (*Jesper Boesen*)	48
Kvinnor och matematik, den femte konferensen (*Barbro Grevholm*)	50
Senaste nytt från *Forum for matematikkens didaktik*, vår danska systerförening (*Barbro Grevholm*)	52
Anslagstavlan	55

Redaktör för Medlemsblad nr 5 har varit *Christer Bergsten*

Medlemsblad nr 5

Under rubriken *Några rader från...* berättar inledningsvis föreningens ordförande om vad som är på gång i SMDF och i svensk matematikdidaktik i övrigt.

Medlemmarna i SMDF inbjuds att till medlemsbladet skicka in kortare artiklar eller berättelser, som kan vara av intresse för föreningens medlemmar att ta del av. I detta nummer rapporterar Ingvill M. Holden och Jesper Boesen från vår eget forskningsseminarium *MADIF3*, som ägde rum den 23-25 januari 2002 i Norrköping i anslutning till Matematikbiennalen. Barbro Grevholm berättar om konferensen *Kvinnor och Matematik 5*, som ägde rum i Kristianstad i april, samt om vår systerförening i Danmark, *Forum for Matematikkens Didaktik.*

I detta nummer publiceras också två artiklar från de två konferenser som bildade starten på vår förening, SMDF. Till *MADIF1*, som ägde rum i Stockholm den 22 januari 1999 i samband med att SMDF formellt grundades, var Ole Björkqvist inbjuden att tala om matematikdidaktikens innebörd och betydelse. Hans föredrag återges här i sin helhet. Ett år tidigare arrangerades en *Minikonferens* i Sundsvall (i samband med biennalen där), då de första organiserade ansatserna gjordes för att bilda en förening för matematikdidaktisk forskning i Sverige (som alltså ett år senare blev SMDF). Där presenterades också några forskningsrapporter. En del av dessa har i olika former sedan dess presenterats på annat håll. I detta medlemsblad återges Barbro Grevholms rapport från denna *Minikonferens*.

En ny lärarutbildning startade höstterminen 2001. I SMDF:s Medlemsblad nr 4 skrev Christer Bergsten om forskningsanknytning inom lärarutbildningen, i detta nummer rapporterar han från ett försök med en samtalsform mellan lärarutbildare, lärarstuderande och praktikhandledare under verksamhetsförlagd utbildning.

För en kort tid sedan kom sorgebeskedet om Mats Martinssons bortgång. Barbro Grevholm ger en personlig minnesteckning av vår käre vän och kollega.

/ Christer Bergsten

Några rader från …

I januari 2002 genomförde vår förening den tredje forskningskonferensen, *MADIF3*, i Norrköping i anslutning till matematikbiennalen som ägde rum där. Det blev en välbesökt och givande konferens tack vare att vi lyckats engagera så många duktiga föreläsare både från Sverige och andra länder. Ett varmt tack till alla er som medverkade till att programmet blev så rikt och varierat. Tack också till vår vice ordförande Christer Bergsten och hans medarbetare, som ansvarade för de lokala arrangemangen. Konferensen kommer att dokumenteras i alla sina delar och medlemmarna får dokumentationen som årsbok för 2002. Särskilt glädjande är det att så många av forskarskolans doktorander deltar i vår verksamhet.

Vid årsmötet som också ägde rum då i Norrköping skedde en del förändringar i styrelsen. Christer Bergsten valde att lämna ordförandeposten efter tre år men stannar kvar i styrelsen ett år för att stärka kontinuiteten i styrelsens arbete. Jag valdes till ny ordförande och vill här passa på och tacka föreningens medlemmar för att ha fått förtroendet att inneha det uppdraget. Vid styrelsens konstituerandemöte utsågs Christer till vice ordförande, vilket innebär att han och jag kommer att fortsätta arbeta tillsammans som ett radarpar, som vi gjort alltsedan föreningens start. Ulla Runesson omvaldes som sekreterare. Nya styrelsemedlemmar är Thomas Lingefjärd (kassör) och Jesper Boesen.

Göte Dahland lämnar sitt styrelseuppdrag och vi vill än en gång framföra föreningens varma tack för hans idoga arbete under åren. Vi tackar också varmt Helena Lilja som lämnade styrelsen för att nu ta på sig uppdraget som ordförande i SMaL. Vi önskar Helena lycka till i det arbetet och ser fram emot ett fortsatt gott samarbete mellan SMDF och SMaL.

Vi är glada att ha kunnat sända ut boken *Research and action in the mathematics classroom*, som är dokumentationen av *MADIF2* i Göteborg. Den är årsbok för 2000 och vi planerar att som årsbok för 2001 ge ut dokumentationen av *Norma01* i Kristianstad 2001. Vi vet alla att det tar tid att få en konferensdokumentation klar men vi är nöjda med att alla bidragen från *MADIF3* redan finns på plats och är redigerade i en första vända. Arbetet fortsätter med all kraft.

Under 2000 hade SMDF en liten temakonferens i anslutning till den årliga Mullsjökonferens som SMaL ordnar. SMDF medverkade även tillsammans med forskargruppen i matematikdidaktik från Umeå i ett tvådagars forsknings-seminarium, som jag tog initiativ till och anordnade i Luleå den 24-25 mars 2001. Seminariet samlade ett fyrtiotal deltagare och bland föreläsarna fanns både svenska, nordiska och internationella forskare. Vi vill gärna fortsätta med liknande mindre temakonferenser i olika delar av landet och om någon av er planerar något arrangemang som lämpar sig för ett samarbete eller samordnat program tar styrelsen gärna emot förslag på det. För närvarande överväger styrelsen att ordna ett SMDF-arrangemang under en del av någon av LUMA-dagarna den 24-26 september. Vi återkommer om det senare. Vi vill gärna ha önskemål från medlemmarna om vilken typ av arrangemang som önskas för framtiden.

Inom kort kommer landets första professur i matematikdidaktik att vara besatt av sin första ordinarie innehavare. Rudolf Straesser från Bielefeld i Tyskland blir professor matematik och lärande vid institutionen för matematik vid Luleå tekniska universitet. Vi kommer genast att värva honom som medlem i SMDF. Han ledde paneldebatten på *MADIF3*, så en del av er har redan lärt känna honom. Det här är bra och viktigt med tanke på forskarskolan och den stora satsning på matematikdidaktisk forskning som sker för närvarande. Vi gratulerar Luleå till en framsynt satsning. Där har man arbetat aktivt för denna befattning i bortåt fem år.

Men det räcker naturligtvis inte med en professor i Sverige för att matema-tikdidaktik ska kunna etableras här som ett vetenskapligt fält. Sverige behöver flera professorer i matematikdidaktik och även fler universitetslektorer i ämnet. Att inrätta och besätta sådana befattningar är en långsam, tidsödande procedur. Vi kan som exempel nämna den professur i matematikkens eller naturvetenskapens didaktik vid lärarutbildningen i Stockholm, som lystes ut i maj 2000 och som ännu inte blivit besatt. Förslaget är att den ska besättas av en naturvetenskapsdidaktiker. Hur lång tid det tog att inrätta befattningen och annonsera den känner jag inte till. Jag vill därför uppmana er alla, som vill medverka till en utveckling av matematikdidaktiken i Sverige, att bearbeta beslutsfattarna på era respektive orter. Om en påverkansprocess startar nu kanske vi har flera befattningar om fyra, fem år. Det vore ett sätt att arbeta för föreningens mål att stimulera, bredda och utveckla forskning och forskar-utbildning i matematikdidaktik i Sverige. Jag har förhört mig försiktigt om huruvida det finns planer på att inrätta fler professurer och det gör det inte så vitt jag kunnat utröna. Så tala med representanter i styrelser och nämnder som råder över dessa befattningar.

Vi vet alla att våra nordiska grannar har betydligt fler befattningar för att leda och utveckla forskning inom matematikdidaktik. Notera till exempel att Danmarks Pedagogiska Universitet annonserat ut doktorandtjänster i matematikens didaktik och ett lektorat i ämnet, att Köpenhamns universitet nyligen lyst ut en professur som innefattar matematikens och naturvetenskapens didaktik, att högskolan i Agder[1] i Norge har lyst ut tre professurer i matematikdidaktik och där har man redan två i ämnet. Agder satsar på att bli ledande i Norge med sin forskarutbildning i matematikdidaktik och blir troligen därmed också ledande i Norden när det gäller antal professorer i ämnet. Samtidigt får Norge ett centrum för matematikutbildning, som kommer att förläggas till universitetet i Trondheim. Det kommer säkert liksom vårt NCM i Sverige att bli en viktig resurs för att nya kunskaper inom matematikdidaktik verkligen ska nå lärare och elever. Dessa båda centra för matematiktutbildning kommer även att vara värdefulla resurser för doktorander i matematikens didaktik både genom referensbibliotek och kontakter med lärare som bedriver utvecklingsarbeten.

Avslutningsvis vill jag inbjuda dig att höra av dig till oss i styrelsen med önskemål och förslag och att sända in bidrag till kommande nummer av vårt medlemsblad. Till sist önskar vi i styrelsen dig en riktigt skön sommar. Vi tror att i hängmattan eller under parasollen kläcker du många goda idéer för matematikdidaktikens utveckling där du verkar. Så placera dig där och låt tankarna komma.

… Barbro Grevholm, ordförande i SMDF

[1] Högskolan i Agder ligger i Kristiansand i södra Norge.

Mats Martinsson död

En av våra mest entusiastiska matematiker och matematikdidaktiker har lämnat oss hastigt och oväntat. Mats levde sitt liv med full kraft och lämnade ingen som mötte honom opåverkad. Med stor övertygelse argumenterade han för sina idéer om hur studenter skulle kunna lära sig och förstå matematiken bättre. Av en tillfällighet höll jag igår i min hand plötsligt sex handskrivna sidor med anteckningar från en föreläsning av Mats. Till årsmötet 1989 för LMFK, Södra kretsen hade jag bjudit in Mats och han valde att tala under rubriken *Från kilskrift till fraktaler.* Jag var på den tiden sekreterare i föreningen och hade i uppgift att skriva referat av föredrag, därav de relativt fylliga anteckningarna.

Som vanligt inledde Mats med att överösa oss med en rad svåra frågor. Är matematik att räkna med? Är matematik att räkna? Vad är matematik? Vad i matematiken? Hur ska det gå till? Han frågade alltså efter ämnets identitet, selektion, legitimitet och metodik. Och så gick han in på begreppen didaktisk innehållsteori, didaktisk fenomenografi och didaktisk kommunikationsteori. Efter en sådan omtumlande inledning med massor av frågor utan svar ledde Mats oss sedan in i matematikens idéhistoria. Efter en rad exempel från matematikens tidiga historia hävdade Mats att matematik är

- att studera mönster och strukturer
- att studera den abstrakta verkligheten
- läran om abstrakta begrepp och de logiska sambanden och att förstå dessa
- abstrakt funktionalism

Här kom nya frågor från Mats. Vad är inlärning? Vad är undervisning? Jo, det första är en förändring av en individs tankeformer och det andra är förståelse för elevernas tankeformer och medvetna försök att åstadkomma förändring av dessa. Hur kan läraren medverka till att en elev går från primitiva tankeformer till mer effektiva tankeformer?

Avslutningsvis ville Mats övertyga oss om att varje individ i ett kultursamhälle i någon mening genomlever sin kulturs historia.

När jag nu åter läser dessa fragmentariska anteckningar kan jag se Mats framför mig livligt gestikulerande och pratande och med intensiv kontakt med sitt auditorium på Fysikum i Lund. Mats såg matematikens skönhet och värde och kunde dela med sig av det till andra och han hade även tidigt insett att lärande och undervisning i matematik är viktiga områden, som man måste arbeta med och tänka på. Vi saknar Mats i de matematikdidaktiska samman-hangen i Sverige, där han hade en viktig uppgift. Samtidigt minns vi med glädje alla inspirerande samtal och föreläsningar under årens lopp. Mats sparade aldrig på sig själv utan delade med sig till oss alla av sina spännande tankar. Vi hedrar hans minne.

/ Barbro Grevholm

Personliga reflektioner kring matematikdidaktiken som vetenskap[2]

Jag vill tacka för hedern att få närvara vid detta matematikdidaktiska forskningsseminarium, och samtidigt för möjligheten att ge en personligt färgad karakterisering av matematikdidaktiken som vetenskap. Det är, som vi säkert alla vet, ett internationellt sett relativt ungt forskningsområde, och liksom för många andra unga discipliner råder det inte samstämmighet ens bland forskarna på området hur man bäst kan definiera forskningen i vetenskapligt avseende.

För mig har det varit en fråga som jag har varit tvungen att återkomma till med jämna mellanrum. Jag har fått den belyst både av mycket erfarna matematikdidaktiker och av akademiskt bildade människor som överhuvudtaget inte har någon erfarenhet av området. Båda kategorierna har lärt mig mycket, och ur varje sådant möte går jag med en något modifierad syn. Särskilt vill jag nämna att det nordiska samarbete inom matematikdidaktikens område, som jag har haft förmånen att delta i under de senaste åren, varit mycket impulsgivande. Bland annat har Mogens Niss genom sina analyser av matematikdidaktiken inverkat kraftigt på det jag vill säga. Frågan är dock om min syn på matematikdidaktiken konvergerar mot samma syn som någon annan har, och i så fall om denna går att beskriva i ett föredrag. Jag är tacksam för chansen.

En central aspekt är den akademiska statusen för de personer som bedriver matematikdidaktisk forskning – om de organisatoriskt borde tillhöra en viss fakultet eller en viss typ av institution, och i grunden om det faktiskt är fråga om en vetenskaplig disciplin som är värd en plats i jämnbredd med andra vetenskapliga discipliner. När denna aspekt kommer i förgrunden, kan den som bedriver matematikdidaktisk forskning få uppleva att företrädare för de mest närliggande disciplinerna, framför allt matematik och pedagogik, är de som är de mest kritiska till en alltför långt gången självständighet.

---

[2] Delar av denna text ingår i rapporten "Matematikdidaktiken i Sverige: En lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet", skriven av Ole Björkqvist år 2002 på uppdrag av NCM och SKM.

Akademisk status är en viktig dimension av matematikdidaktiken som vetenskap, särskilt om den är avgörande för penningströmmarna till forskningen. Men akademisk status kan vara viktig också genom att den gör forskningen respektabel i samhället, man får upp ögonen för den som en karriärmöjlighet, och allt fler skarpa hjärnor söker sig till området. Denna möjlighet till tillväxt är mycket tilltalande. Men om pengar eller tillväxt är det dominerande motivet för strävan efter akademisk status, skulle nog de flesta betrakta denna status som ett självändamål. Det borde nog finnas äkta motiv att föra fram.

Ett sådant kunde vara historiskt. Eftersom matematiken redan i århundraden varit en av de allra viktigaste vetenskaperna, som samhället haft stort behov av att utveckla och stöda, har matematikundervisning i alla kulturer utövats och effektiverats. Vad man borde undervisa, för vem, hur, och vid vilken ålder, var frågor som fanns med redan då systematisk undervisning initierades. Matematikens relativa stabilitet lade grunden för en tradition eller ett hantverksartat yrkeskunnande hos matematiklärarna. Strävan efter att småningom göra detta kunnande allt bättre är något helt mänskligt.

Det finns exempel på studier från 1900-talets första hälft, bland annat från Sverige, där undervisningsmetoder i matematik och elevers prestationer dokumenterats för eftervärlden. Beskrivningar av typiska elevfel måste vara ett gott exempel på analytiskt intresse, och problemet är odiskutabelt matematikdidaktiskt. De som gjorde dessa undersökningar drevs av ett genuint intresse, inte av akademiska karriärmöjligheter.

Studiet av matematikundervisning har under de senaste årtiondena blivit ett stadigt växande, internationellt etablerat, akademiskt arbetsfält. Samarbetet mellan forskare från olika länder sträcker sig tillbaka till 1908, då man i Rom grundade ICMI (The International Commission of Mathematics Instruction). Man inriktade sig på frågor som berörde undervisning på alla tänkbara åldersstadier, men med tonvikt på urval av undervisningsstoffet och dess ämnesmässiga organisation. Småningom tillkom komparativa studier, inklusive försök att sammanjämka nationella läroplaner i matematik, samt, i takt med den tillväxande psykologiska vetenskapen, försök att tillämpa allmänna teorier för begreppsbildning och inlärning på specialfallet matematik. Man kunde beskriva detta skede som förvetenskapligt, i hög grad normativt och utan ambitioner att utveckla en egen teoribas.

Utvecklingen mot en egentlig vetenskaplig disciplin började omkring år 1960. Tidsmässigt sammanfaller detta med att man i USA började satsa stora summor på matematik och naturvetenskaper, i syfte att utveckla en konkurrensdugligare teknologi. Internationellt var också detta en tid då man i många länder gick mot enhetligare skolsystem för allt äldre elever. Man kunde identifiera olika slag av nya problem förknippade med matematikundervisning, vilka inte varit lika uppenbara tidigare då förändringarna i samhället inte varit så snabba.

Med satsningarna på forskning och utvecklingsarbete följde en ökad institutionalisering (Kilpatrick, 1992). Akademiska lärostolar inrättades vid universiteten i Tyskland, Frankrike, USA m fl länder. Några av våra dagars främsta fristående forskningsinstitut grundades vid denna tid (IOWO – sedermera Freudenthal instituut – i Holland, IDM i Tyskland, Shell Centre i England och flera stycken IREM i Frankrike). Raden av vetenskapliga tidskrifter som uteslutande ägnar sig åt matematikens didaktik är i våra dagar imponerande lång. Det internationella vetenskapliga umgänget har intensifierats via forskarsamfund och -nätverk, samt inte minst via de internationella konferenserna, bland vilka den vart fjärde år återkommande gigantiska ICME (International Congress on Mathematical Education) är den bäst kända.

Med ett kvasiempiriskt perspektiv kan man hävda att matematikens didaktik numera är lika väl etablerad som mången annan ny disciplin – det finns tillräckligt många människor världen över som sysselsätter sig med forskning på området.

Tvärvetenskapligheten och bredden i frågeställningarna har emellertid utgjort ett problem då de aktiva forskarna själva försökt sig på att karakterisera disciplinen. Vid ICME-5 i Adelaide 1984 grundades en sedan dess verksam arbetsgrupp (TME, Theory of Mathematics Education) som har sysselsatt sig med analyser av de teoretiska ramarna – identifiering av de grundläggande problemen och sammanhängande angreppssätt för studiet av matematikundervisningens totalitet. I denna metaforskning utgår man typiskt från ett systemperspektiv med tre växelverkande komponenter: forskning, utvecklingsarbete och praxis. Man beaktar även filosofiska, historiska och sociala aspekter av matematiken, vilka så ofta försummas vid en alltför snabb karakterisering av objektet.

Många av dagens matematikdidaktiska forskare eftersträvar explicit att inte på ett oberättigat sätt reducera fältets komplexitet. Sådan reduktion gör man sig skyldig till om man definierar matematikens didaktik t ex på något av följande sätt (Steiner, 1984): som studiet av relationerna mellan matematiken, individen och samhället; som rekonstruktionen av dagens matematik på elementär nivå; som utvecklandet och utvärderandet av matematikkurser som går att undervisa; som studiet av matematisk kunskap, dess olika former, representationer och tillväxt; som studiet av hur barn fungerar vid inlärning av matematik; eller som studiet och befrämjandet av professionellt matematik-lärarbeteende. Med en dylik definition skulle någon speciell aspekt, som i och för sig förvisso är viktig, på ett oönskat sätt fastställa centrum för disciplinen. Till denna risk ansluter sig forskarens tvekan att på förenklande grunder ge matematikens didaktik någon viss vetenskaplig klassificering, d v s som en del av matematiken, en del av pedagogiken, tillämpad allmän didaktik, en speciell gren av epistemologin, eller dylikt.

Den utomstående betraktaren kan ställa sig sympatisk till ett sådant resonemang och till och med anse det logiskt att matematikens didaktik håller sig med många forskningsparadigm som kompletterar varandra. Men, som den huvudsakliga invändningen lyder, kan inte samma resonemang genomföras för nästan vilken tvärvetenskap som helst? Är inte syntes via systemteori ett slags undermedicin för vilken tvärvetenskaplig disciplin som helst som behöver legitimera sig?

Väldefinierade problemställningar är inte heller någon garanti för att man skall kunna räkna med akademisk status. Att med hjälp av sådana övertyga sina likasinnade forskarkollegor om att det man sysslar med är vettigt är betydligt lättare än att hävda disciplinen utåt.

I mina försök att för mig själv fastställa övertygande argument varför matematikens didaktik förtjänar akademisk status har jag haft stor glädje av några kriterier som Mogens Niss (1993) formulerat:

> Accepterandet av ett ämnes didaktik som en vetenskaplig disciplin är avhängigt av
>
> – om ämnet uppfattas som ett väsentligt undervisningsämne i alla länder,
>
> – i hur hög grad undervisning i ämnet förknippas med djupt gående svårigheter som varken är lokala eller tillfälliga och

– om det kan göras påvisbart eller sannolikt att forskning kan leda till att svårigheterna blir mindre.

Det förutsätts att det är fråga om systematisk och allmänt tillgänglig kunskap, stadd i utveckling och under kontinuerlig kritisk utvärdering.

Matematiken uppfattas som ett svårt skolämne av en mycket stor del av befolkningen överallt på jorden. Få skolämnen förorsakar lika mycket frustration och dålig självkänsla. Det oaktat har matematiken hög status bland såväl skolelever som vuxna och ses inte sällan som en nyckel till en vidareutbildning med utsikter till en bättre ställning i samhället i framtiden. Just insikten att skolmatematiken selekterar individer i samhället var orsaken att Danmarks humanistiska forskningsråd för nio år sedan satsade 5 miljoner kronor på ett projekt benämnt "Matematikundervisning och demokrati". I Finland uttryckte en bredbasig kommitté för matematisk-naturvetenskaplig allmänbildning år 1989 stor oro för vad den internationellt sett låga kunskapsnivån skall innebära för medborgarnas beredskap att hävda sig på områden där kunskaper i matematik och naturvetenskaper utgör nödvändiga förutsättningar. Den nuvarande regeringen har i sitt handlingsprogram innefattat en strävan att år 2002 ha höjt finländarnas kunskaper i matematik och naturvetenskaper till en “hög internationell nivå”.

De organisatoriska lösningarna för att befrämja matematikdidaktisk forskning varierar från land till land. T ex i Sverige har man varit särskilt benägen att understöda enskilda projekt, ofta förhållandevis frikostigt, snarare än att etablera kontinuerlig forskning vid akademiska institutioner. Emellertid har man nu i någon utsträckning börjat sträva mot den senare organisationsformen, som vi haft i Finland sedan år 1974. Den internationellt sett dominerande lösningen – enligt en i Tyskland utgiven översikt över forskarutbildningsprogram från hela världen (Batanero et al, 1992) – är att förlägga den matematikdidaktiska forskningen till den utbildningsenhet som ombesörjer matematiklärarnas pedagogiska grundutbildning. Därmed åstadkommer man den snabbaste möjliga påverkan av forskningens resultat på praktiken, genom att de blivande lärarna via sina handledare kommer i kontakt med den forskning som bedrivs vid institutionen och på andra ställen.

Den intima kopplingen mellan forskning, utvecklingsarbete och praxis (vilken i princip gäller didaktik för vilket ämne som helst) ställer särskilda krav på kontakterna mellan forskare, skoladministratörer, aktiva matematiklärare och läromedelsproducenter. Dessa krav kan bäst formuleras så att forskningen bör ske i en pedagogisk miljö, som det kan ta åratal att bygga upp. Ett väsentligt element som man har valt att utgå från i Finland är förekomsten av övningsskolor, vid vilka forskare och lärare gemensamt kan genomföra utvecklingsprojekt. Erfarenheter vid övningsskolorna tillvaratas dessutom som impulser för ny forskning. I en sådan miljö är det typiskt att några individer är aktiva läromedelsproducenter medan andra t ex kan vara särskilt aktiva när det gäller lärarfortbildning. Till bilden kan ytterligare höra betydande bidrag från en regelbunden växelverkan med lokalsamhällets lärare och skoladministratörer. Här skall betonas, att det är angeläget att den pedagogiska miljön för en liten språklig minoritets didaktiska forskning inbegriper skolor och skolfolk från minoritetens hela bosättningsområde. Så är fallet med den svenskspråkiga pedagogiska miljön i Finland.

Utgående från de krav som jag ställer på min egen disciplin och på omständigheter som jag anser väsentliga för att den skall utvecklas och kunna påverka samhällets utveckling, vill jag hävda att matematikens didaktik har en berättigad vetenskaplig hemvist vid universiteten och närmare bestämt (åtminstone i Finland) vid deras lärarutbildningsinstitutioner. I Vasa har medvetenheten gradvis ökat om de möjligheter, som vår pedagogiska miljö ger. Inom den egna institutionen är det av stor betydelse att man har samtidiga engagemang i olika slag av lärarutbildning (dvs utbildning av klasslärare, ämneslärare, lärare för yrkesskolor, m fl) och att man har tillgång till didaktisk forskning som gäller andra ämnen. Samarbetet med Vasa övningsskola har bl a tagit formen av utveckling av ett läromedel i matematik för lågstadiet som rönt en viss nationell uppskattning. De lärare vid övningsskolan, som har deltagit i seminarieverksamheten, har påtagligt bidragit till att utveckla den ämnesdidaktiska diskursen vid vår förhållandevis lilla institution. Kontakten med lärare i matematik och naturvetenskaper på olika håll i Svenskfinland har på senare tid framför allt skötts via ett av institutionen utgivet kontaktblad, "LInjalen", och genom fortbildningsdagar.

Utöver en dylik lokal bas för den matematikdidaktiska forskningen finns det givetvis andra nivåer av kontakter som borde beaktas för att vi skall kunna se akademisk matematikdidaktik som en samhällsnyttig satsning.

Den nationella forskningen måste vara knuten till den nationella pedagogiska miljön (om man kan tala om en sådan), dvs visa att den sysselsätter sig med utbildningsproblem som upplevs som nationellt viktiga, kunna påvisa att den kan ge dellösningar till problemen och ha kopplingar till de instanser som representerar nationell praxis. Om vi antar att varje lokal akademisk miljö som sådan har en särskild profil, framstår ett slags nationell profil som en sammansättning av de lokala profilerna. Anpassningen mellan den nationella akademiska matematikdidaktiska profilen och de nationella utbildningsproblemen är av största betydelse för den akademiska matematikdidaktikens (nationella) status. Här kan förekomsten av en nationell förening för matematikdidaktisk forskning spela en avgörande roll. Den behöver inte nödvändigtvis ha en koordinerande roll – i betydelsens forskningsreglerande – men den kan fungera som ett forum vars existens ökar sannolikheten för att man skall upptäcka brister i den nationella forskningen.

Den internationella nivån, dvs den som man normalt avser när man talar om matematikdidaktisk forskning, kunde på samma sätt förväntas på ett balanserat sätt sysselsätta sig med de globala problemen inom matematikundervisningen och borde kunna påvisa att den kan ge dellösningar till dessa problem. Därtill borde det finnas kopplingar till instanser som effektivt skulle kunna påverka internationell praxis inom matematikundervisningen genom att implementera dessa lösningar, om vi vill dra parallellen fullt ut. Sådana instanser finns dock inte, men UNESCO spelar i alla fall litet av den rollen.

Matematikdidaktiska forskare på internationell nivå har på senare tid insett betydelsen av att allt tydligare presentera forskningens problemställningar, metoder och resultat för en bredare publik. En ICMI-konferens i Washington 1994 *What is Research in Mathematics Education, and What Are Its Results?* ledde till publicerandet av två volymer (Sierpinska & Kilpatrick, 1998) där många av världens främsta matematikdidaktiker analyserar temat eller belyser särskilda vinklar av det med exempel. Den stora bredden i såväl syften som metoder framstår där med all tydlighet – men egentliga utvärderingar av hela fältets status i dag får man leta efter också i detta verk. Ett undantag är matematikdidaktikens relation till vetenskapen matematik, som får en särskild analys.

Mogens Niss vågade sig senaste året på försöket att presentera den matematikdidaktiska forskningen i en global skala (Niss, 1998). Han gjorde det inför en *matematik*konferens, i en strävan att göra forskningens resultat begripliga för ett närliggande forskarsamfund, vars uppfattning om matematikdidaktikens vetenskaplighet är nog så väsentlig.

Bland de viktiga matematikdidaktiska forskningsresultat, som Niss för fram, kan nämnas

– matematikinlärningens förvånande komplexitet,
– att de inlärda begreppen beror på de specifika domäner inom vilka de exemplifierats och inbäddats i samband med att en viss elev lärt sig dem,
– att dualiteten mellan matematiska processer och begrepp innebär hinder för inlärning, och hurudana dessa hinder är,
– hur elever har fjärmat sig från bevis och bevisföring,
– vilka möjligheter till underverk och vilka fällor som följer med IT i samband med matematikundervisning.

Det råder egentligen inte någon brist på moderna försök att åstadkomma synteser av vad matematikdidaktisk forskning är. Enbart på Kluwers förlag har det publicerats tre viktiga verk. Innan *Mathematics Education as a Research Domain* såg dagens ljus 1998, hade man *International Handbook of Mathematics Education* (Bishop et al.,1996) och *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Biehler et al., 1994). Enligt min uppfattning är Mogens Niss förhållandevis korta framställning bland det bästa att starta från om man vill få en snabb översikt.

Han presenterar några definitioner som inte gör anspråk på att vara fullständiga, men som återspeglar fältets mångfasetterade och tvärvetenskapliga framtoning:

> *Subject.* The didactics of mathematics, alias the science of mathematics education, is the scientific and scholarly field of research and development which aims at *identifying*, *characterising*, and *understanding* phenomena and processes actually or potentially involved in the *teaching* and *learning of mathematics at any educational level.*
>
> *Endeavour.* As particularly regards "understanding" of such phenomena and processes, attempts to uncover and clarify *causal relationships* and *mechanisms* are in focus.

> *Approaches.* In pursuing these tasks, the didactics of mathematics addresses *all matters* that are pertinent to the teaching and learning of mathematics, irrespective of which scientific, psychological, ideological, ethical, political, social, societal, or other spheres this may involve. Similarly, the field makes use of considerations, methods, and results from *other fields and disciplines* whenever this is deemed relevant.
>
> *Activities.* The didactics of mathematics comprises different kinds of activities, ranging from theoretical or empirical *fundamental research,* over *applied research* and *development,* to *systematic, reflective practice.* (Niss, 1998, s. 4-5)

Jag vill särskilt ansluta mig till Niss´ framställning av problemfältet och den förståelse av det som man eftersträvar som akademisk matematikdidaktiker. Sökandet efter kausala samband ser jag framför allt som länken till samhällets förväntningar på forskningsresultat med direkt tillämpning, likaså det faktum att utvecklingsarbete borde vara en integrerad del av matematikdidaktikens aktiviteter.

Det kan i alla fall vara bra att beakta samhällets förväntningar ytterligare något. När vi liksom Niss presenterar forskningens resultat – borde vi inte då också för oss själva ha analyserat vilka mål vi ännu inte gjort tydliga framsteg mot? Kanske samhällets förväntningar till stor del ligger just på sådant som forskningen ännu inte berört? Särskilt på det nationella planet kan en sådan granskning av ouppfyllda förväntningar vara mycket klarläggande och säkerligen ha stor betydelse för matematikdidaktikens vetenskapliga status.

Som gäst vid en matematikdidaktisk forskarförenings seminarium borde man kanske inte peka på att det kan finnas problemområden som behöver insatser. Jag är inte heller tillräckligt insatt för att kunna säga vilka de i så fall är. Men eftersom jag ser stor luckor i den finländska matematikdidaktiska forskningen tror jag mig kunna generalisera.

En matematikdidaktisk forskarförening är en ytterst fin sak. Den borde ha alla möjligheter att lyckas som en sammanhållande länk för människor som trivs med forskning, som trivs med undervisning och som trivs med matematik.

Referenser

Batanero, M.C., Godino, J.D., Steiner, H.G. & Wenzelburger, E. (1992). Preparation of Researchers in Mathematics Education: An International TME-Survey. *Occasional Paper 135*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Biehler, R., Scholz, R.W., Strässer, R. & Winkelmann, B. (Eds) (1994). *Didacticsof Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. In: D.E. Grouws (Ed*), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Company.

Niss, M. (1993). Privat kommunikation.

Niss, M. (1998). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. *Tekster fra IMFUFA Nr 351*. Roskilde: Roskilde Universitetscenter.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds) (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study*. Två volymer. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Steiner, H.G. (1984). Theory of Mathematics Education. I: H.G. Steiner, N. Balacheff, J. Mason, H. Steinbring, L.P. Steffe, G. Brousseau, T.J. Cooney & B. Christiansen, Theory of Mathematics Education (TME). Occasional Paper 54. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, s. 16-32.

/ Ole Björkqvist

Vi skriver y = x + 5. Vad betyder det?

Inledning

I en pågående undersökning av lärarstuderande inom grundskollärarutbildningen med inriktning mot matematik och naturvetenskap för årskurs 4-9 kartlägger jag de studerandes begrepp i matematik och matematikdidaktik. Vilka begrepp har de studerande med sig från gymnasieutbildningen och hur påverkas deras uppfattningar och syn på begreppen under lärarutbildningen? För denna artikel har jag valt ut en enda delfråga i undersökningen:

• *Vi skriver y = x + 5. Vad betyder det?*

En anledning till att jag valt den frågan är att jag vill anknyta till de resultat som Morten Blomhøj redovisar från en studie om funktionsbegreppet och niondeklassares begreppsförståelse (Blomhøj, 1997). Att begreppen variabel, ekvation, funktion och graf är centrala i skolans matematikundervisning diskuteras av Blomhøj (s 7-11). En rad forskningsresultat inom matematikdidaktiken berör just dessa begrepp, vilket framgår i Kierans översikt (1992) om undervisning och inlärning av algebra i skolan och av Talls översikt om forskning kring funktioner och analys (1996). Övervägande delen av denna forskning rör studerande i skolan. Eftersom jag undersöker lärandet hos studerande som påbörjat högskoleutbildning är det intressant att diskutera vad som är känt om inlärningen före högskolestudierna. Är det möjligt att se vad som förändrats från niondeklass fram till avslutade gymnasiestudier? Finns det tydliga skillnader i synsätt och begreppsuppfattning hos de studerande på dessa två nivåer?

Undersökningsgruppen

Hösten 1996 påbörjade 48 studerande lärarutbildningen i matematik och naturvetenskap med inriktning mot årskurserna 4-9 på högskolan i Kristianstad. Det är denna grupp jag följer och vars utveckling jag dokumenterar kvalitativt och kvantitativt så utförligt som möjligt under studiernas gång. Från studiernas start har ett antal studerande lämnat utbildningen av skilda skäl. Under tredje terminen då kursen i algebra genomfördes kvarstod 38 studerande i gruppen. Två var frånvarande då enkäten genomfördes.

Antagningskraven till utbildningen innebär att man ska ha gymnasiekompetens från naturvetenskapligt program eller motsvarande. De studerande har intervjuats om sin tidigare studiegång och det visar sig att ungefär hälften av gruppen har gymnasiestudier från naturvetenskaplig eller teknisk linje eller naturvetenskapligt program. En fjärdedel av de studerande har gått samhällsvetenskaplig, ekonomisk eller social linje och därefter gått naturvetenskapligt basår. Resterande fjärdedel kommer från vårdlinje, social linje eller ekonomisk linje och har därefter studerat på Komvux för att få naturvetenskaplig kompetens.

Min undersökningsgrupp är inte självklart jämförbar med de danska eleverna eftersom jag ställt frågan till lärarstuderande med svensk utbildning motsvarande naturvetenskapliga gymnasiestudier. Det är ändå av värde att studera de båda gruppernas synsätt och tolkningar och göra jämförelser. Den undervisning som ges om linjära ekvationer och funktioner i skolan upp till och med årskurs nio i de båda länderna har stora likheter. Det framgår av kursplanedokumenten (Undervisningsministeriet, 1995; SKOLFS, 1994) samt av beskrivning från läroböcker i Danmark (Blomhøj, 1997) och genomgång av någon lärobok i Sverige (se nedan).

Undersökningsfrågan: ***Vi skriver y=x+5. Vad betyder det?***

Blomhøj har i sin studie ställt frågan: "y = x + 5, Hvad kan du sige om x i forhold till y?", till 22 elever i årskurs 9 i Danmark. Blomhøj delar in svaren i fyra kategorier a) svar som anger att x är 5 mindre än y, b) svar som tolkar ekvationen utan att svara på frågan, c) svar som anger att x är 5 mer än y och slutligen d) svar som varken tolkar ekvationen eller svarar på frågan.

Kategori c) omfattar flest svar (7 stycken) och de studerandes svar innehåller ofta motsägelser. Nästan var tredje elev ger ett svar i kategori c). I kategori d) finner vi fem elever. Det vanligaste svaret i denna grupp är alltså en felaktig uppfattning om den givna ekvationen. Hur ser det då ut när de studerande passerat gymnasieskolan och påbörjat högskolestudier? Lever denna felaktiga uppfattning kvar eller har de studerande utvecklat andra synsätt?

Jag har valt att ställa frågan en aning mera generellt genom formuleringen: *Vi skriver y = x+5. Vad betyder det?* Anledningen till det är att jag vill öppna möjligheten för de studerande att inte endast reda ut förhållandet mellan x och y utan även ge andra tolkningar av likhetens innebörd. I den instruktion jag ger de studerande står det: "Försök svara så tydligt du kan och med egna ord.

Jag söker din spontana och intuitiva uppfattning och det finns inte något förväntat eller rätt svar. Om du inte kan svara generellt försök ge exempel som belyser din uppfattning eller kommentera hur du tänker inför frågan. Försök uttrycka någon tanke även om du inte har ett svar du är nöjd med. Kommentera gärna dina svar."

Ett tecken på kvalitet i studentens begreppsuppfattning är att kunna ge en mångfald olika tolkningar och bilder samt att kunna knyta an begreppet till andra närliggande begrepp och till olika kunskapsområden i matematiken. Med den instruktion jag gav hoppades jag få fram ett så mångfacetterat svar som möjligt från var och en av de studerande.

Frågeformuläret besvarades av de studerande under tredje terminen av deras lärarutbildning strax innan de påbörjade en tiopoängskurs om tal och algebra. Även de uppföljande muntliga intervjuerna genomfördes före denna kurs. Avsikten är att upprepa frågeformuläret och intervjuerna efter avslutad kurs. Före kursen om tal och algebra har de studerande haft en inledande fempoängskurs om problemlösning i matematik, som även innehåller uppsatsskrivande och projektarbete.

Kategorisering av svaren

Det mest slående vid en jämförelse är att det vanligaste svaret (kategori c)) bland de danska eleverna inte återfinns bland svaren från de lärarstuderande. Jag har valt att inordna svaren i sex kategorier av vilka två har de flesta svaren, ytterligare två en dryg handfull svar och de övriga fyra svar.

Kategori 1) Svar som talar om hur y och x hänger ihop värdemässigt.

Kategori 2) Svar som beskriver sambandet som en funktion.

Kategori 3) Svar som talar om att två variabler förekommer.

Kategori 4) Svar som beskriver sambandet som en rät linje.

Kategori 5) Svar som innefattar en värdetabell för y=x+5.

Kategori 6) Svar som ger andra specifika beskrivningar.

De studerandes svar fördelar sig enligt följande tabell:

Kategori nr	1	2	3	4	5	6
Antal svar	20	6	13	5	4	4

Varje student kan ha lämnat svar i mer än en kategori. Antalet svar från en student fördelar sig på följande sätt:

Antal svar (kategorier)	0	1	1	3 eller fler
Antal studenter	2	20	10	4

Kodningen av studenterna har skett med F för kvinnliga och M för manliga följt av ett ordningstal.

Exempel på svar ur några av kategorierna:

1) Svar som talar om hur y och x hänger ihop värdemässigt.

F1 y=(värdet av x)+5

F4 Att y är summan av 5 och det tal man bestämmer att x är.

M8 För varje tal som y är lika med så är x 5 mindre. För varje tal som x är lika med så är 5 större.

M9 Att du får fram y genom att sätta ett tal på x:ets plats och addera med 5.

2) Svar som beskriver sambandet som en funktion.

M4 Vi vill ange värdet av y som en funktion av en konstant och en variabel.

M5 Funktionen y=variabeln x+siffran 5

3) Svar som talar om att två variabler förekommer.

F3 Två obekanta, x och y är variabler.

M2 y får olika värden beroende på vilket värde vi sätter x till.

M10 Olika för olika människor. För mig betyder det att ett x-värde representerar ett y-värde.

4) Svar som beskriver sambandet som en rät linje.

M6 y=x+5 är en linje som skär y-axeln då x=-5 och skär x-axeln då y=5.

Flera av kvinnorna ger svar som innehåller tre eller fler olika svarskategorier:

F6 2 okända. Storleken på y är hela tiden beroende av hur stort x är. Ju större x desto större y och ju mindre x desto mindre y. y är en funktion av x. Man kan rita upp detta i ett diagram. (Bifogar figur med linjen korrekt ritad). (Kategori 2, 3, 4).

F7 Det är ett algebraiskt uttryck. Om man sätter in olika värden på y kan man beräkna x och sedan rita in linjen i ett koordinatsystem. Det är alltså en rät linje. (Fogar in värdetabellen

x	5	4	3	2
y	0	1	2	3

och markerar dessa punkter i ett koordinatsystem och ritar linjen)
(Kategori 3, 4, 5, 6).

F15 En funktion

x	1	2	-1	-2	-3
y	0	1	2	3	2

(Ritar koordinatsystemet och markerar dessa värden och drar linjen)
(Kategori 2, 4, 5).

Alla de fyra studenter som har tre eller fler svarskategorier är kvinnor. En intressant fråga är om detta hänger samman med kvinnors större förmåga att uttrycka sig verbalt och att variera sitt språk. En annan förklaring kan vara att kvinnor är mer lyhörda för instruktioner och anstränger sig att uttrycka sig så fylligt som möjligt. Ytterligare en möjlighet är att dessa kvinnor har en djupare syn på begreppet i fråga.

Intervjuer

Förutom att alla de studerande har besvarat frågor skriftligt har jag intervjuat åtta av dem med utgångspunkt från svaren i frågeformuläret. Ett syfte med intervjuerna är att ge de studerande tillfälle att utveckla sina tankar om det skriftliga svaret. Under samtalen kan jag ställa frågor, som gör att jag bättre förstår hur studenten tänker och resonerar. Intervjuerna har spelats in på band och därefter skrivits ut. Efter den kurs i tal och algebra som ingår i lärar-utbildningen kommer de studerande att få svara på samma frågor igen och den intressanta frågan är om svaren då kommer att skilja sig från dem som redovisas här. I intervjuerna utgick samtalet från de svar den studerande givit i frågeformuläret. Den här diskuterade frågan utgjorde fråga två och föregicks av ett samtal som handlade om att klassificera ett antal matematiska objekt med avseende på om de innehåller en variabel eller variabler, är ett algebraiskt uttryck, en ekvation och/eller en funktion. I några fall återknyter samtalet under fråga två till det som sagts under denna första punkt.

Några exempel på hur samtalen föll ut (I står för intervjuaren):

I: Mm, OK. Då kan vi gå till nästa fråga, och där handlar det om, y=x+5. Vad betyder det? Och då har du skrivit att y är summan av fem och det tal, som man bestämmer att x är. Det är ju en tolkning naturligtvis, som är riktig och rimlig, va. Kan du komma på nåt annat sätt att lägga en betydelse i y lika med x plus fem?

F4: (Paus), ähh...... nej det beror på.... nej....(Paus), oh, det var inte så lätt.

I: Nej.

F4: (Paus) Det beror på vad... jag fattar inte riktigt.... alltså jag tycker denna..... men sen vet jag inte riktigt om jag.... vad jag tycker mer.

I: Nej. Här gjorde du så att du bestämde ett x-värde, och då säger du att då får man ett y-värde.

F4: Ja, man kan göra tvärtom också ju, att man bestämmer ett y-värde.

I: Ja.

F4: Men det.... eller ja, det tycker jag är samma sak.

I: Mm, ja.

F4: Fast, man bara ändrar bokstäver.

I: Ja, fast du inte vet det, mm.

F4: Nej, det är det kanske inte.

I: Mm, mm.

F4: Men det är det ju självklart.

I: Ja, det är alldeles riktigt, ja, mm, så du ser det här som en likhet.

F4: Mm.

I: Där man kan ge någondera av dom okända talen och få det andra talet, på det sättet, ja.

F4: Ja.

I: Mm, och det, det är vad du, vad du kommer att få här i betydelse. Det slår dig inte att du kan lägga in nån annan betydelse i det?

F4: Nej inte.... nej.

I: Nej. Om du tittar på det vi hade här uppe då till exempel, hm, med funktioner.

F4: Ja, man kan ju rita nånting av det sen alltså, det är ju, det är ju en funktion.

I: Mm, jaha.

F4: Tycker ju jag, eller ja.... kommer av beteckningen.

I: Ja.

F4: Det blir ju en funktion av det, om du sätter in ett x så får du ut ju ut ett y, beroende på vilket, så kan man ju rita upp en graf.

I: Ja, OK, ja. Har du nån inre bild av hur den grafen ser ut, just till den här funktionen?

F4: Nja, den är ju rak.

I: Mm.

F4: Sådär.

I: Mm, rita där på ditt papper.

F4: Äh, oj, ja, (Paus), så här kanske.

I: Ja.

F4: Om det är...

I: Den punkten du pekar på, på y-et.....

F4: Ja, det är fem.

I: Det är fem där ja, just det, mm. Så ser den grafen ut, en rät linje alltså.

F4: Mm.

I: Ja, jaha, då kom du plötsligt på flera, dels att man kunde se likheten, utifrån x eller utifrån y och så kunde, kunde du se det som en funktion och nu ser du det som en grafisk bild i koordinatsystemet.

F4: Mm.

I: Ja, många betydelser av samma lilla uttryck, va.

F4: Ja.

I: Mm.

F4: Det har jag inte tänkt.

I: Mm.

F4: Så mycket har jag inte tänkt.

Kommentar: F4 har från början gett ett svar i kategori 1. Under samtalet kommer hon fram till att istället för att ge x och bestämma värdet av y kan man ge y och bestämma värdet av x. Hon säger dock strax att hon tycker det är samma sak. Hon tolkar alltså y=x+5 som en likhet genom vilken hon kan beräkna ett av de okända talen när hon vet värdet av det andra okända talet. Spontant kommer hon inte på fler tolkningar. När jag hänvisar till vårt samtal under den föregående frågan och nämner funktioner säger hon direkt att ja, man kan ju rita nånting av det. Hon inser att y beror av x och att man kan rita en graf. Hon vet att grafen blir en linje och ritar på sitt papper en korrekt bild av funktionen. Hon har alltså passivt fler tolkningar som hon valde att inte redovisa eller inte själv kom på då hon besvarade frågan.

I: Bra, då har vi rett ut den, fråga ett. Och om vi går till tvåan, så har du där fått, y=x+5, och frågan: Vad betyder det? Då har du sagt, det är två okända, storleken på y är hela tiden beroende av hur stort x är, ju större x desto större y ju mindre x desto mindre y, och y är en funktion av x och man kan rita upp det i ett diagram, och så har du ritat den linjen.

F6: Mm.

I: Och jag ser att den går genom fem på y-axeln och genom minus fem på x-axeln som hör till den likheten.

F6: Ja.

I: Ja, så då har du alltså sett det dels, dels ser du det som ett samband mellan x och y.

F6: Mm.

I: När du får ett värde på x så hör det till ett värde på y, och dels direkt, som en funktion, och till den hör en graf i koordinatsystemet.

F6: Mm.

I: Det var ju många olika tolkningar.

F6: Mm.

I: Det är ju också med den definitionen du gav nyss en likhet, va?

F6: (Paus).

I: Som en ekvation, du har, okända som du söker, eller hur?

F6: Ja.

I: Mm. Och man skulle ju kunna tänka sig, att jag säger: Jag ger dig y lika med tio.

F6: Mm.

I: Kan du då bestämma x?

F6: Ja, det kan jag, det är fem ju.

I: Ja. Så att man kan också se det, förutom det du har beskrivit, som en ekvation.

F6: Ja, just det.

I: Där varje givet värde på x eller y ger ett motsvarande värde på den andra variabeln.

F6: Ja.

I: Det var många olika tolkningar på den.

F6: Mm, ja.

Kommentar: F6 har från början ett fylligt svar i kategorierna 2, 3 och 4. I hennes svar finns ett koordinatsystem (som hon kallar diagram) med graderade axlar där det tydligt framgår att den räta linjen går genom 5 på y-axeln och -5 på x-axeln. Detta har hon uppenbarligen kunnat rita utan att behöva göra en värdetabell. Hon skriver istället "ju större x desto större y" i texten. I samtalet under punkt ett har hon talat om vad hon menar med likhet eller ekvation. När jag påminner om det kan hon efter viss tvekan också se y=x+5 som en ekvation och därmed ange hur man beräknar en av de obekanta då den andre är given. Det ligger trots allt underförstått i hennes ursprungliga beskrivning. Där säger hon att storleken på y är hela tiden beroende av hur stort x är även om hon inte talar om hur y beräknas när man vet x.

I: Ja, en rät linje. Ja, mm, riktigt, ja. Och då kan vi titta på tvåan, där var då givet y=x+5 och så frågar jag: Vad betyder det?

M3: Ja, det, ja, det är lite svårt, jag tänkte på innan också, jag vet inte riktigt vad jag ska skriva på den.

I: Nej.

M3: Jag ville ha det till en, som sagt en ekvation, samtidigt vill jag ha det till att det kan betyda en linje i, i det tvådimensionella planet.

I: Mm, just det i koordinatsystemet ja, ja.

M3: Ja.

I: Och om du har en linje, en graf, så betyder det att då ser du den, uppfattar du den uppenbarligen, som en funktion?

M3: Ja, en funktion, jag ser den som en funktion, eftersom y, man ser ofta det att när y är friställt, så brukar man associera det till en funktion oftast.

I: Ja, men du kan både se den som en ekvation och som en funktion...

M3: Ja och algebraisk....

I: Och du kan koppla en grafisk bild till den?

M3: Ja en grafisk bild har jag, har jag också, en som en rät linje då.

I: Ja.

M3: Som då stegras, ja.

I: Ja. Dessutom nämnde du här på den att du kunde se det som en diofantisk ekvation.

M3: Ja.

I: Det kan du göra på den.

M3: Det är ju samma som om man flyttar över x-et så får man samma.

I: För plötsligt har du väldigt många olika betydelser.

M3: Man har ja, samma sak betyder samma saker, samma uttryck betyder många saker matematiskt kan man väl säga.

Kommentar: M3 har inte skrivit svar på fråga två utan ger en muntlig tolkning. Han ser y=x+5 som en ekvation samtidigt som han vill beskriva det som en linje i planet. Han nämner till och med begreppet tvådimensionell. Han uttrycker också att när y är friställt brukar man oftast associera det till en funktion. I samtalet under fråga ett har han utan att använda värdetabell ritat en korrekt graf till både $y=x^2$ och till y=1/x och förklarat hur han får grafen till ett annat linjärt uttryck. Han har dessutom i fråga ett klassificerat en liknande ekvation som en diofantisk ekvation. Att det kommer upp hänger samman med att den pågående kursen om tal behandlar diofantiska ekvationer. M3 har läst en 20-poängskurs i matematik innan han började på lärarutbildningen. Trots att han talar mycket sönderhackat kan man märka det på hans sätt att uttrycka sig. Han har ett mera utvecklat matematiskt språk än många av de övriga studenterna.

I: Bra. Om vi då går till tvåan, så har jag preciserat här y=x+5, och så frågar jag: Vad betyder det?

M14: Ja.

I: Och då säger du att något x-värde adderat med fem blir ett visst svar y, så då läser du detta som att man tilldelar x ett värde och så lägger man till 5 och då har man fått det tal som vi ska kalla för y. Det är så du tolkar det?

M14: Ja.

I: Mm. Och det är ju en riktig tolkning, ja. Hade du kunnat förstå det på nåt annat sätt?

M14: Ja. Man skulle ju kunna stoppa in ett y-värde också och eftersöka x.

I: Ja.

M14: Det går ju också.

I: Ja, du kan vända på steken, ja. Alldeles riktigt. Då har du två tolkningar. Finns det ytterligare nån tolkning, man kan göra?

M14: (Paus). Nej inte jag ser den... nej, jag ser den mer här som man eftersöker eller eh, ja om man eftersöker nåt svar så bör man veta ett annat.

I: Ja, mm. Där är två okända, och du kan antingen tilldela den ena eller den andre ett värde.

M14: Ja, eller så kan det va alltså, en funktion, men då ser jag som att då får man nåt tal givet, och så i och för sig, det blir samma.

I: Mm, men när du säger en funktion ja, eh, och det pratade vi nyss om att i koordinatsystemet som du ritade där på ditt papper så kan den representeras av en grafisk bild.

M14: Mm.

I: Kan du förknippa nån grafisk bild med den funktionen, som du då tolkar här? Y lika med...

M14: Ja det är det att den skär eh, ska vi se, om man stoppar in x är lika med noll, så kommer den att skära y-axeln vid fem, den här...

I: Mm, och vilken form kommer kurvan att ha?

M14: Ja, det är fortfarande, vad ska man säga, diagonalt genom y i där säger man x är noll så är y fem så kommer den att gå som en rät linje.

I: Och var skär den x-axeln nånstans?

M14: Äh, där y är noll, så kommer (Paus), ja det blir minus fem där.

I: Ja , mm, och det du har ritat är en rät linje som lutar likadant som du ritade nyss y lika med x där.

M14: Ja.

I: Ja, då kan du alltså se den som en funktion och du kan se en grafisk bild och en linje som är förknippad med den funktionen. Mm.

M14: Ja.

I: Kan man se det på ännu fler sätt? Du har egentligen fyra sätt här va, så att de två som du förde in och sen funktionen och så den grafiska bilden.

M14: Mm.

I: Finns det nåt mer sätt?

M14: (Paus). Inte vad jag kommer på nu.

Kommentar: M14 ger ett skriftligt svar i kategori 1. Vid samtalet kan han genast ge den alternativa tolkningen att beräkna x då y är givet. Efter några meningar då vi vrider och vänder på dessa tolkningar kommer han på att man kan se y=x+5 som en funktion, men han säger även att det blir detsamma. Under fråga ett har han ritat grafer till funktioner. Då jag anknyter till det klarar han att rita en korrekt bild av den önskade linjen med utgångspunkt från skärningen med y-axeln och lutningen. Fler tolkningar än så kommer han inte på. Under samtalet visar han att han behärskar fler tolkningar än den han givit från början.

Diskussion

I en undersökning av det här slaget som rör de studerandes begrepp är det många frågor som är av intresse. Jag ska här diskutera några av dem.

Har lärarstuderande en rikare begreppsapparat än eleverna i årskurs nio? Vad har hänt under studierna i gymnasiet som gör att det vanligaste svaret i årskurs 9 inte längre förekommer då gymnasiestudierna är över? Vilka begrepp nämns i de studerandes svar? Vilka begrepp kunde det varit naturligt att finna i svaren? Vilka missuppfattningar eller felskrivningar finner man i svaren? Vad skiljer de studenter som svarar med en enda kategori från dem som har en mer mångfacetterad beskrivning?

Vilka matematiska begrepp förekommer i de studerandes svar?

Vid analys av hela svarstexten från de skriftliga intervjuerna finner jag en stor mängd matematiska begrepp. Jag har samlat dem i grupper.

1 Begrepp som handlar om att jämföra tal:
lika, olika, mer än, större, mindre, samma

2 Begrepp som innebär olika benämningar på tal:
tal, konstant, siffra, värde, variabel, känt, okänt, obekant

3 Begrepp som hör nära samman med funktionsbegreppet:
funktion, variabel, beroende, samband, algebraiskt uttryck

4 Begrepp som innebär operationer:
lägga till, dra bort, addera, subtrahera, minus, plus, summa, lösa, sätta, bestämma, räkna ut, ta reda på, representera, åskådliggöra grafiskt, (rita, illustrera)

5 Begrepp som är kopplade till en figur:
rita, illustrera, linje, rät, rak, koordinatsystem, koordinataxlar, x-axel, y-axel, värdetabell, diagram, punkter

6 Övriga begrepp:
sektorer, tårtbitar, cirkel, ekvation, allmängiltigt, assimileras

Vad innebär detta? Den samlade texten med de studerandes skriftliga svar utgör knappt en och en halv sida. I det materialet finns ungefär femtio begrepp berörda. Det illustrerar kanske främst att matematiken är ett begreppstätt ämne. Det visar även hur viktigt språket är för att kommunicera matematik. För en lärarkandidat är det ett stort arbete att tillägna sig det professionella språk, som är nödvändigt för en matematiklärare. I smått och stort framgår det att de studerande inte behärskar språket ännu. Så står det till exempel *substrahera* i kandidatens svar istället för *subtrahera*. Det är knappast en felstavning utan en missuppfattning av vad det heter. Vi ser även att kandidaten säger diagram där en erfaren lärare skulle ha sagt koordinatsystem. Språket är nödvändigt för att kunna uttrycka sin begreppsuppfattning. En god begreppsuppfattning innebär även att det finns kopplingar mellan alla dessa begrepp och att den studerande kan se relationer mellan begreppen och har en struktur för hur de hänger samman.

Har lärarstuderande en rikare begreppsapparat än de undersökta eleverna i årskurs nio? Eftersom jag inte har tillgång till hela svarstexten från niondeklassarna är det vanskligt att uttala sig. Vi kan dock notera att det finns begrepp som niondeklassarna använder och som vi inte hittar hos de lärarstuderande. Ingen lärarstuderande skriver graf, medan det finns hos flera av niondeklassarna. Å andra sidan talar niondeklassarna inte om funktion eller variabel i den text, som finns i Blomhøjs artikel. Niondeklassarna nämner positiva och negativa tal, medan ingen lärarstuderande tar upp det. Negativa tal förekommer dock i värdetabellen hos en av de lärarstuderande. I det sammanhanget kan vi även notera att i båda grupperna endast hela tal hanteras. Niondeklassarna talar om produkt eller resultat, begrepp som inte finns hos de lärarstuderande.

Den vanligaste tolkningen

Mer än hälften av studenterna har tagit med ett svar i kategori 1, vilket innebär att de tolkar y=x+5 som ett samband mellan värdet på x och på y. Varför är det svaret det mest näraliggande för flertalet? De ser likheten som en regel som talar om hur y beräknas då man känner värdet på x (eller möjligen omvänt eller båda delarna). Som värdemässigt samband mellan x och y uppfattar alla utom en y=x+5 på ett korrekt sätt. Här skiljer sig då svarsbilden kraftigt från niondeklassarnas. Även om grupperna inte är direkt jämförbara skulle det kunna ge en indikation om att under de år som går från niondeklass till avslutade gymnasiestudier har det något avgörande hänt på denna punkt. Vad har varit avgörande? Inverkar en viss vana vid att hantera bokstavs-beteckningar och algebra? Handlar det om färdighet att handskas med linjära ekvationer och funktioner? Handlar det om intellektuell mognad? Vi kan inte svara på det på grundval av denna undersökning. Intressant vore att följa upp utvecklingen hos niondeklassarna och se i vilket skede förändring inträffar i deras utveckling.

Fler än hälften av de studerande ger endast en tolkning som svar på frågan och ungefär en dryg fjärdedel ger två tolkningar. Är det rimligt att lärarstuderande har en så pass onyanserad bild av y=x+5? Vilka kunskaper och färdigheter är önskvärda hos lärarstuderande? Är det inte nödvändigt för dem att ha en mångfald olika synsätt och uttryckssätt för ett så pass fundamentalt begrepp som den räta linjens ekvation eller den linjära funktionen? Hur långt är det möjligt att nå? Cooney (1994) redovisar att han i intervjuer funnit brist på flexibelt tänkande hos lärarstuderande. Han menar att de inte kommer att förvärva flexibilitet i tänkande och metodval om inte frågan explicit behandlas i utbildningen. Han framhåller även att för att lärare ska förvärva god förmåga att förstå elevernas tänkande är det nödvändigt för dem att utveckla en god begreppslig grund i matematik.

Hur har de studerande mött utsagor av typen y=x+5 i skolans undervisning?

Ungefär hälften av de lärarstuderande gick ut grundskolan i början av nittio-talet och övriga är äldre studenter. För att se hur de kan tänkas ha mött y=x+5 under utbildningen har jag därför analyserat en lärobokserie i matematik, som skrevs i slutet av åttiotalet (Mårtensson & Svensson, 1988, 1989, 1990). I grundskolans årskurs 7 mötte eleven där begreppet koordinatsystem, punkt, värdetabell och grafisk bild. De vanligaste exemplen är räta linjer, men linjens ekvation ges aldrig. I årskurs åtta behandlas förenkling av uttryck med en eller flera obekanta och ekvationer med en obekant. I årskurs nio fortsätter övningar på förenkling av uttryck. Slutligen under rubriken Samband kommer man in på begreppen graf och funktion. Under rubriken räta linjens ekvation sägs att "sambandet mellan y och x hos en linjär funktion kan uttryckas med ekvationen (formeln) y=kx+m". I fördjupningsavsnitten behandlas exempel på icke-linjära funktioner.

I gymnasiets undervisning behandlas y=x+5 huvudsakligen under det första studieåret, även om ekvationen givetvis förekommer i olika tillämpningar senare. Som exempel på en studiegång har jag valt framställningen i *Matematik 2000* (Björk et al, 1990). I kapitlet Funktioner behandlas först koordinatsystemet, därefter funktionsbegreppet och den linjära funktionen i ett 15 sidor långt avsnitt, som domineras av räta linjens ekvation. Slutligen behandlas ekvationssystem, huvudsakligen med linjära ekvationer.

Med utgångspunkt från hur y=x+5 presenteras i undervisningen genom läroboken kunde man förvänta sig att de studerande på frågan, som behandlas här, skulle svara att y=x+5 är ekvationen för en rät linje. Just så uttrycker sig ingen. M6 säger att "y=x+5 är en linje." M13 skriver "Man kan illustrera ekvationen." Endast två svar innehåller ordet ekvation. I samtalen säger M3 "Jag vill ha det till en, som sagt en ekvation, samtidigt vill jag ha det till att det kan betyda en linje i, i det tvådimensionella planet". I samtalen använder varken F4 eller F6 spontant ordet ekvation, utan ser i första hand likheten som ett sätt att koppla värdena för x och y till varandra. Vad beror det på att så få ser y=x+5 som en ekvation? Uppenbarligen är det mera naturligt för de studerande att tolka likheten som en föreskrift för hur x eller y ska beräknas. Hänger detta samman med att de vid inlärningen är inställda på att utföra beräkningar snarare än att förstå vad en given sak innebär? Hur kommer denna inställning att påverka dem som lärare? Thompson et al (1994) beskriver hur lärare väljer att implementera en ny kursplan på helt olika sätt beroende på vilken orientering de väljer, beräkningsmässig eller begreppslig (calculational or conceptual). De visar i olika episoder från klassrum hur detta tar sig uttryck i lärarens samtal med eleverna och menar att konsekvensen på sikt kan bli att elever som utsätts för en beräkningsmässigt orienterad lärare kan dra slutsatsen att det inte är meningen att matematik ska vara begriplig.

Ordet *linjär* används ofta i framställningen i läroböckerna. Man talar om linjär ekvation eller linjär funktion, med tillhörande graf som är en rät linje. Noteras kan att ingen av de studerande använder begreppet linjär. Hur kan det komma sig? Kan det vara så att "linjär" inte har fått en innebörd för dem? Inte ens begreppet rät linje är självklart. Alternativa uttryck som "rak (linje)" eller "lutar diagonalt" används för att beskriva en rät linje. Det vore också naturligt att säga att y=x+5 är en ekvation i x och y av första graden. Det svaret finner vi inte från de studerande.

Vilka missuppfattningar eller felskrivningar finner man i svaren?

Blomhøj (1997) skriver att hos de elever som svarar i kategori c) finns det ofta inbyggda logiska motsägelser i svaren. Svar av detta slag (kategori c) finner vi inte hos de lärarstuderande men det finns andra svar med inbyggda motsägelser. Till exempel säger M6 att linjen skär y-axeln i x=-5. Men på y-axeln har alla punkter x-koordinaten noll och trots det reagerar inte studenten för sitt uttalande. I svaret från F7 finner vi en värdetabell som inte stämmer med y=x+5 utan istället speglar x+y=5. Den linje den studerande ritar stämmer med de beräknade värdena i tabellen. I samtalet finner F7 ingen anledning att justera sin tabell eller linje. Det finns smärre missgrepp av mer formell art som att skriva siffra när man menar tal och att tala om en funktion av en konstant och en variabel.

Diskussion av skillnader i gruppernas svar

Blomhøj (1997, s 19) skriver i sin analys av niondeklassarnas svar "For det første viser resultaterne, at det åbenbart er kognitivt vanskeligt for mange elever, at laese ligningen som en fastlaeggelse af en størrelsesrelation mellem to variable størrelser og at give denne størrelsesrelation en sproglig formulering." Att döma av svaren från lärarkandidaterna föreligger inte samma kognitiva svårighet för dem. Storleksrelationen som ges av y=x+5 bereder dem inte problem. De tycks emellertid vara i första hand inriktade på att tolka likheten som en process, en föreskrift för hur en okänd storhet ska beräknas med hjälp av den andra (jämför Sfard, 1991). Av niondeklassarna är det fem, som inte svarar på frågan eller säger att de inte vet, medan alla lärarstuderande utom två besvarar frågan.

De flesta niondeklassarna ger ett svar eller möjligen ett svar med ett förtydligande av svaret bifogat. Flera svar är vanligare bland lärarkandidaterna. Samtidigt kan vi se i intervjuerna att de säger om två olika tolkningar att "det är detsamma". Lärarkandidaterna tycks inte villiga att uppfatta som två olika tolkningar det som en erfaren lärare förmodligen ser så. Är detta ett spår till utveckling? Handlar det om en förmåga att uppfatta nyanser i tolkningar av begrepp?

En annan intressant observation är att ingen av de svarande ger en konkret tolkning av likheten y=x+5. En erfaren lärare svarade "x är min ålder och y är min brors ålder. Han är 5 år äldre än jag." Behovet att anknyta den matematiska utsagan till en konkret situation verkar inte finnas varken hos elever i grundskolan eller hos kandidaterna. Kan det bero på den kontext i vilken frågan ställdes? Uppfattar de studerande att svaret ska vara inom-matematiskt?

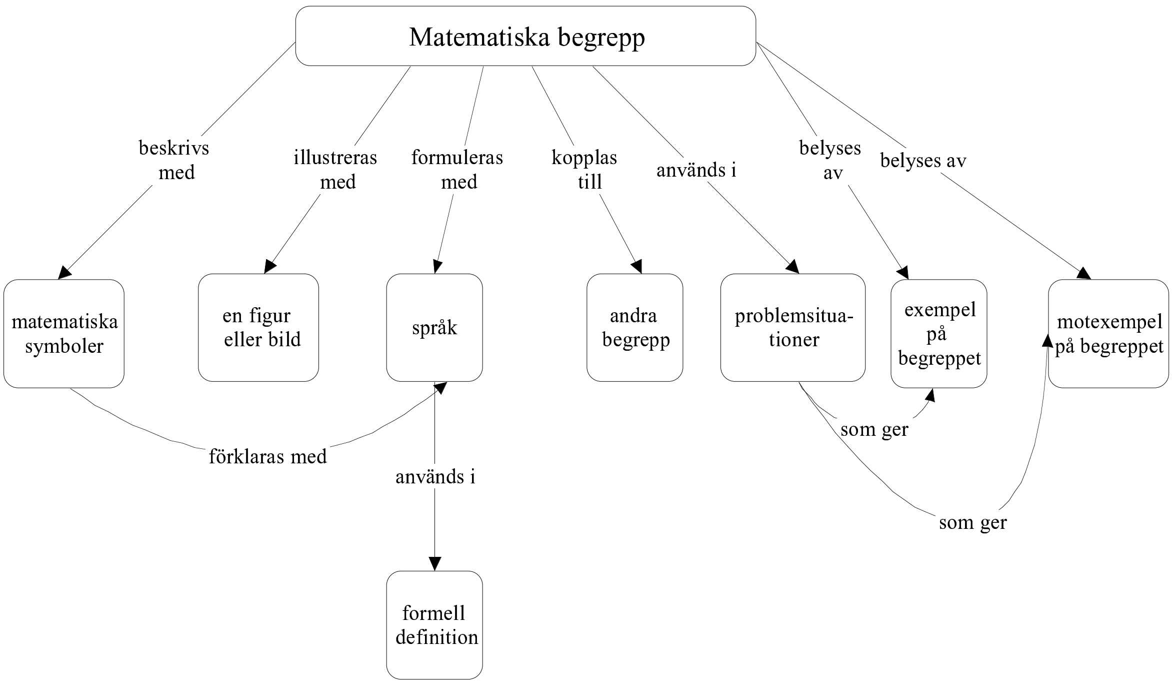
Matematikdidaktiska teorier om begrepp

Sfard (1991) har fört en diskussion om att ett operationellt kunnande leder fram till uppfattningen av ett matematiskt objekt. Sfard hävdar att det operationella begreppet för de flesta är första steget i att tillägna sig en ny matematisk idé. Steget från en processuppfattning till en objektuppfattning är varken snabbt eller lätt för den lärande. Sfards reifikationsteori har dock ifrågasatts starkt av bl a Confrey och Costa (1996). Deras mål är att skapa debatt om vilka slags teorier som kan bidra till att aktivt reformera undervisningen i matematik på gymnasial och postgymnasial nivå.

Vollrath (1994) hävdar att didaktiska diskussioner om begrepp förr eller senare hamnar i problemet om förståelse. Han frågar vad det innebär att förstå ett begrepp. Att kunna en definition räcker inte, den kan läras utantill. Vi får beskriva förståelse i termer av förmågor som att kunna ge exempel, att ge motexempel, att testa exempel, att känna till egenskaper, att känna till samband mellan begrepp samt att använda kunskap om begreppet. Vollrath menar att sådana förmågor kan testas. Det är svårare att beskriva vad vi ska mena med att ha bilder av ett begrepp, att uppskatta ett begrepp, att känna till vikten av ett begrepp. Vollrath hävdar att den lärande genomgår stadier av förståelse och att det inte finns en slutlig förståelse.

Tall (1992) diskuterar begreppen *begreppsdefinition* (concept definition) och *begreppsbild* (concept image). Begreppsdefinitionen består av ord som används för att specificera begreppet medan termen begreppsbild används för att beskriva den totala kognitiva struktur som är förbunden med begreppet. Även termen "procept" har lanserats som en förening av process och begrepp. Halldén (in press) har diskuterat begreppet "conceptual change" och menar att för stor vikt fästs vid det. Han hävdar att frågan om hur studenter når förståelse för olika fenomen och begrepp kanske belyses bättre genom att lägga vikt vid de olika former för kontextualisering som är i verket när studenterna arbetar med sin förståelse.

Själv vill jag se en begreppskarta (Novak, 1985) över ett matematiskt begrepp på följande sätt:



En annan bild av begreppet matematiskt begrepp finner vi i Bergsten et al (1997). Vilken teori eller modell för begrepp och begreppsutveckling är användbar i en studie av detta slag? Det är förmodligen för tidigt att dra någon slutsats om det just nu. I sin översikt över forskning om elevers begrepp i matematik, naturvetenskap och programmering skriver Confrey (1990) att denna forskning domineras av tre huvudsakliga traditioner: Piagetianska studier i den genetiska epistemologins tradition, tillämpningar av vetenskaps-filosofi i den tradition som sysslar med *begreppsförändring* (conceptual change) och forskning om systematiska fel. Hon avslutar artikeln med att uppmuntra forskare att genomföra forskning inom lärarutbildningen på ett mer sofistikerat sätt utan att återskapa den omogna närsyntheten som fanns hos den tidiga forskningen om missuppfattningar. Hon menar att de ramar som utvecklats för att studera elevers begrepp inte nödvändigtvis är tillräckliga för att studera lärares begrepp. Förhoppningen hon hyser är att vid forskning om lärare tonvikten ska läggas på deskriptiva studier av interventioner som utformats för att nå största möjliga framgång.

Kan teorierna, diskussionen eller resultaten ge någon vägledning för hur innehållet i lärarutbildningen ska utformas? En tydlig skillnad kan noteras i niondeklassarnas syn och synen hos de lärarstuderande. Kommer en utveckling att bli synlig när undersökningen upprepas hos de lärarstuderande efter genomförd kurs i algebra? Kan vi lära något av iakttagelserna?

Sammanfattning

Jag har här diskuterat resultat från en liten del av en undersökning där lärarkandidaters förkunskaper inför en kurs i algebra betraktas. Studien kommer senare att behandla dessa kunskaper i relation till läget efter kursen i algebra. De resultat vi nu kan se är att lärarkandidater inte hyser den missuppfattning Blomhöj fann hos mer än en tredjedel av niondeklassarna och att lärarkandidaterna ger en något mer nyanserad beskrivning av utsagan y=x+5 än niondeklassarna. Frågan om kandidaternas synsätt är tillräckligt flexibelt för att kunna förstå elevernas tankegångar måste utredas ytterligare. Vad som återstår att studera är hur lärarkandidaternas begrepp ter sig efter studierna i algebra. Resultaten därifrån och hur det skulle kunna påverka lärarutbildningen får jag återkomma till i ett annat sammanhang.

Referenser

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. Nämnaren Tema*. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Björk, L-E et al (1990). *Matematik 2000. Lärobok NT1*. Stockholm: Natur och Kultur.

Blomhöj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrebsforståelse.
Nordisk MatematikkDidaktikk 5, nr 1, s 7-31.

Cooney, T. J. (1994). Teacher education as an exercise in adaptation. In D. Aichele & A. Coxford (Eds), *Professional development for teachers of mathematics. NCTM Yearbook 1994*, 9-22. Reston: NCTM.

Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. In Cazden & Courtney (Eds), *Review of research in education. American Educational Research Association*, 16, s 3-56.

Confrey, J. & Costa, S. (1996). A critique of the selection of "Mathematical objects" as central metaphor for advanced mathematical thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning. Vol 1*, no 2, s 139-168.

Halldén, O. (in press). Conceptual change and contextualization. I W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Eds), *New perspectives in conceptual change.* Oxford: Elsevier.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I Grouws, D. A. (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. 390-419. New York: Macmillan.

Mårtensson, G. & Svensson, L. (1988, 1989, 1990) *Beta Högstadiets matematik. Åk 7-9.* Malmö: Liber.

Novak, J. D. (1985). Metalearning and metaknowledge strategies to help students learn how to learn. In L. West & A. Pines (Eds), *Cognitive structure and conceptual change*, 189-207. New York: Academic Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

SKOLFS 1994:3 (1994). Kursplaner för grundskolan.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. I Grouws, D. A. (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419. New York: Macmillan.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. I A. Bishop et al (Eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-326. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, A., Philip, A., Thompson, P. & Boyd, B. (1994). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. In D. Aichele & A. Coxford (Eds), *Professional development for teachers of mathematics. NCTM Yearbook 1994*, 79-92. Reston: NCTM.

Undervisningsministeriet (1995). Matematik. Faghäfte nr 12. Undervisnings-ministeriet: Köpenhamn.

Vollrath, J. (1994). Reflections on mathematical concepts as starting points for didactical thinking. In Biehler et al (Eds), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 61-72. Dordrecht: Kluwer.

/ Barbro Grevholm

Samtal som metod för utveckling av lärarutbildning och didaktisk forskning

Inledning

Lärarutbildningen har en central roll för utvecklingen av skolans arbete i landet – dels genom utbildning av framtidens lärare, dels genom fortbildningsverksamhet för redan verksamma lärare. Det är också där som praktikrelaterad forskning om lärande och undervisning kan genomföras, i de fall då forskarutbildad personal är engagerad inom lärarutbildningen. Detta framhålls i propositionen om den nya lärarutbildningen. Genom den verksamhetsförlagda utbildningen kan lärarutbildare och lärarstuderande ta till vara på lärares erfarenheter, lyssna på problem och önskemål, och tillsammans med handledare initiera utveckling och utprövning av nya idéer: praktikskolor/handledare/praktiserande lärarstuderande kan på detta sätt generera forskning och vara mottagare av resultat av forskning, medverka i forskning (till exempel i examensarbeten), och tillsammans med lärarutbildare "översätta" forskningsresultat till "praktiska termer".

I ett försök att finna ett forum för utvecklingsarbete inom lärarutbildningen, i linje med dessa tankar, genomfördes ett samtal mellan lärarstuderande, praktikhandledare och lärarutbildare i matematik. Samtalet ägde rum på en praktikskola och upplevdes av deltagarna som ett mycket värdefullt komplement till de ”vanliga” inslagen i den verksamhetsförlagda utbildningen. I denna uppsats rapporteras kort om utfallet av detta samtal.

Metod

En lärarutbildare i matematik (dvs undertecknad) ordnade ett möte på en högstadieskola tillsammans med tre lärarstuderande, som alla gick andra terminen på grundskollärarprogrammet MaNO 4-9[3] och tre lärare i matematik (högstadiet) som fungerade som praktikhandledare. Under samtalet förde jag minnesanteckningar över de synpunkter som framfördes. För att få en öppen och otvungen atmosfär spelades inte samtalet in på band. Deltagarna fick vid

[3] De var alltså studerande inom det “gamla” grundskollärarprogrammet. Samtalet ägde rum för några år sedan, i slutet av vårterminen under de studerandes första längre praktikperiod.

samtalets inledning ett papper med några frågeställningar föreslagna som utgångspunkter för diskussionen:

1) *Grundskollärarutbildningens organisation*
Balansen teori-praktik. Hur borde det läggas upp?
Vad är praktikhandledarens ansvar i utbildningen?
Är lärarkandidaterna[4] bra förberedda när de kommer till praktikskolan?
Hur fungerar informationen/utbytet med lärarhögskolan?

2) *Grundskollärarutbildningens innehåll*
Ämnesteori - metodik: För mycket, för lite, vilken, etc ?

3) *Matematikdidaktikens innehåll*
Didaktiska teorier eller "tips"?

4) *Matematikdidaktisk forskning*
Vad ska forskningen syssla med?
Om du som lärare fick och resurser, vad skulle du välja att undersöka mera?
Vilka frågeställningar/problem skulle du som lärare vilja att forskare studerade?

5) *Övrigt*

Resultat

Grundskollärarutbildningens organisation

Samtalet kring den första punkten, grundskollärarutbildningens organisation, rör sig mest runt praktikens utformning. Lärarkandidaterna tycker att den inledande s k miljöpraktiken har varit nyttig. Det är bra att i ett tidigt skede av utbildningen få en konkret bild av vad det innebär att vara lärare, att få träffa både lärare och elever och få se hur det fungerar på en skola.

Under praktiken den andra terminen skulle det vara bra med en paus mellan mellanstadie- och högstadiepraktiken, med några metodikseminarier inlagda, menar lärarkandidaterna. Då kan man verkligen ta till sig metodikundervisningen. Som det nu har varit börjar man precis vänja sig vid mellanstadiet (eller om det är högstadiet först) för att nästa dag plötsligt börja undervisa på

[4] Lärarstuderande kallades då oftast “lärarkandidater”. Den termen används därför i fortsättningen i denna text.

högstadiet. Det skulle behövas någon slags sammanfattning, för sig själv, av sina erfarenheter, innan det börjar något helt nytt.

Något man saknar och efterlyser är praktikmoment inriktade mot specialundervisning.

Handledarna tycker att kontakterna mellan praktikhandledare och praktikområdesansvarig har fungerat bra. Man har fått den information som behövs. Ibland, menar handledarna, kan det emellertid vara svårt att hänga med när ändringar görs.

Grundskollärarutbildningens innehåll

När det gäller grundskollärarutbildningens innehåll betonar samtliga handledare vikten av att ha goda ämneskunskaper om man ska fungera bra som lärare på högstadiet. Detta håller lärarkandidaterna med om, men uttrycker samtidigt sin bestämda uppfattning att det är metodiken som borde stå i centrum i utbildningen. Man lär sig ämnet i avsikten att undervisa på grundskolan, och detta borde påverka även de ämnesteoretiska kurserna i utbildningen, menar dom. Med en matematikkurs (10 poäng) bakom sig i utbildningen, där didaktiska moment och ämnesteori löpt parallellt, anser dessa lärarkandidater att den ämnesteoretiska delen varit så krävande att studiet av de didaktiska momenten blivit lidande. En bättre modell vore att läsa de ämnesteoretiska momenten först, med en tydligare inriktning mot innehållet i grundskolans matematikkurser, och därefter koncentrera sig helt på de didaktiska momenten. Lärarkandidaterna tycks emellertid inte vara helt eniga om vilken modell som är bäst. En lärarkandidat anser också att ämneskurserna inte varit tillräckligt lärarinriktade och att metodiken fått alltför litet utrymme, medan de andra två tycker att kurserna har varit bra och att didaktikkurserna visst har gett en hel del.

En handledare uttrycker, utifrån sin erfarenhet med lärarkandidater de senaste åren, en viss oro att den nya grundskollärarutbildningen ger för "tunna" kunskaper i ämnena, att bredden är bra men att det sker på bekostnad av djupet/säkerheten. Den metodiska kunskapen utvecklar man ständigt i sitt lärararbete, medan det är svårare att hinna med och läsa vidare i ämnet. Det praktiska lärararbetet tar mycket tid och man orkar inte hela tiden hänga med i både ämnet och den didaktiska forskningen.

Ett mentorskap (vad det nu innebär) under hela utbildningen, som kanske också fortsätter under inledningen av den första anställningen efter examen, vore ett sätt att få kontinuitet i och förlänga den metodiska delen av lärarutbildningen dit där den hör hemma: i praktiken.

Matematikdidaktikens innehåll

Att göra metodikundervisningen under lärarutbildningen till en "tipspärm" vore inte bra, anser lärarkandidaterna. Det behövs mycket mer av den egentliga lärarkunskapen under utbildningen än vad vi hittills har fått. Ett exempel som anges är att få reda på vad som ofta är svårt att fatta för eleverna. Det handlar om att få kunskap om elevkunskap. Förstår man orsakerna bakom elevernas problem att förstå är det också lättare att själv förstå varför en undervisningsmetod är bättre än en annan.

I början av sin utbildning har man också, menar lärarkandidaterna, ett behov av att gå igenom kursplanerna läsår för läsår. Då är man bättre förberedd när man kommer ut på praktik och får undervisa till exempel i årskurs sju. Man vet då vad eleverna har läst innan och på vilken nivå matten ligger i sjuan. Vi vet för lite om vad grundskolans matematik innehåller.

Ett förslag angående undervisningen i matematikdidaktik/metodik under lärarutbildningen går ut på att det ibland borde komma gästföreläsare på kurserna, forskare eller personer med stark praktikanknytning. Kanske kan praktikhandledare även delta i metodikundervisningen? De närvarande handledarna menar dock att den metodikundervisningen ger dom ändå under praktiken genom alla samtal som äger rum kontinuerligt kring planering och genomförda lektioner. Handledarna känner mer behovet att komma till lärarhögskolan för att få kontakt med "vad som är nytt" och för att få träffa och utbyta idéer med andra handledare.

Matematikdidaktisk forskning

Det första handledarna nämner, när det gäller vad dom behöver från matematikdidaktisk forskning, är metodik för svaga elever. Man känner sig otillräcklig metodiskt för att riktigt kunna hjälpa sina svagaste elever med deras matematikinlärning. Man pekar på att detta problem har blivit svårare att hantera nu när systemet med särskild och allmän kurs försvinner. Vilka är egentligen effekterna av nivågruppering, undrar man. Det borde man forska om.

Relaterat till denna problematik är den nya godkändgränsen. Hur ska man göra när elever inte blir godkända? Ska man anpassa undervisningen och inrikta den på att alla ska bli godkända? Handledarna nämner detta som sådant dom funderar på nästan dagligen under sitt arbete.

En annan fråga, som både handledare och lärarkandidater tycker är viktig och svår, är hur man kan stimulera elever till att intressera sig mer för matematiken. Vad säger forskningen om det? Det räcker inte att då och då komma med "roliga" uppgifter, utan det handlar mer om att skapa ett mer långsiktigt och djupare intresse för ämnet.

En annan punkt, som en av handledarna tar upp, gäller hur man kan föra in mer av "filosofiska" diskussioner och resonemang i undervisningen. Eleverna vill gärna bara räkna och få fram ett resultat (ett svar). Det är svårt att i undervisningen på ett mer systematiskt sätt få igång sådana diskussioner och samtal med matematiskt innehåll som det skrivs om i den nya kursplanen.

På frågan om det finns särskilda innehållsliga moment i matematikkursen där det skulle behövas konkreta forskningsresultat, pekar en handledare på svårigheten att motivera eleverna att jobba med algebran. En annan vill gärna veta mer om det faktum att så många elever tycker det är så svårt att räkna med procent. Vad beror det på? Någon säger också "Stryk bråkräkning!" men vill inte diskutera det ytterligare. Lärarkandidaterna har inte några egna synpunkter på denna fråga.

Diskussion

Såväl handledare som lärarkandidater var mycket positivt inställda till den här typen av samtal som idé. Handledarna ansåg att det var givande att tillsammans med både lärarkandidater och ämnesmetodiker från lärarutbildningen i en lagom stor samtalsgrupp diskutera matematikundervisningen, dels för deras roll som handledare, dels för sin egen undervisning. Lärarkandidaterna deltog i samtalet med engagemang, vilket tyder på att det i en liten grupp av den här sammansättningen kändes både otvunget och givande att ventilera tankar kring hur de upplevde sin egen utbildning, framför allt då praktikens och metodikundervisningens utformning och innehåll.

Att praktiken är nyttig och egentligen det viktigaste i hela lärarutbildningen får man ofta höra från lärarkandidater. Denna uppfattning kunde man under samtalets gång spåra även bland dessa kandidater. Det var hela tiden själva utövandet av läraryrket, det praktiska lärararbetet, som fokuserades i de synpunkter som framfördes. Man vill veta hur man ska göra, genom hela grundskolans matematikkurs bit för bit. Termen *lärarkunskap* användes ibland av lärarkandidaterna (dock aldrig av handledarna), men det är svårt att utifrån vad som sades sluta sig till vilken innebörd de gav denna term. Eftersom de efterlyste mer av den egentliga lärarkunskapen än vad de hittills fått under det första året, som innehöll en stor del ämnesteori (i matematik och kemi), verkar det dock som om termen lärarkunskap för dessa kandidater huvudsakligen innehåller undervisningsmetodikens olika aspekter. Det är också naturligt att ha denna uppfattning då man just ska börja med det där att undervisa. När man utan undervisningserfarenhet står där i klassrummet ansikte mot ansikte med ett tjugotal elever, som väntar sig att bli ledda genom ett undervisningspass på fyrtio, kanske till och med sextio eller åttio minuter, vill man gärna ha färdiga metoder till hands att luta sig emot. Att ha fördjupade kunskaper i ämnena känns då inte lika väsentligt som att veta vad man ska säga, hur man ska säga det, vilka uppgifter som kan vara lämpliga att ge och som "fungerar", eller hur svårt just det här avsnittet brukar vara för eleverna.

Det är därför bra att det finns praktik tidigt under utbildningen, så att det här med att stå framför klassen avdramatiseras och förankras i verkligheten. Frågan är bara hur denna första praktik, som kommer efter den inledande s k miljöpraktiken, bäst kan förberedas. En synpunkt som framfördes var att lärarkandidaterna vet för lite om vad grundskolans matematikkurser innehåller. Naturligtvis har kursplanen behandlats i didaktik/metodikundervisningen. Det finns emellertid knappast vare sig utrymme eller anledning att i detalj diskutera varje punkt däri precis i början av lärarutbildningen. Ett sådant dokument är skrivet på ett språk och med ett innehåll som är utkristalliserat efter en mycket lång och genomarbetad procedur, vilket gör att det krävs både erfarenhet och mognad för att förstå vad där "egentligen" står. Utan denna mognad och erfarenhet ser man mest tomma fraser. Dessutom finns läroböcker för hela grundskolan tillgängliga i biblioteket. Utbildning är inte bara den undervisning som ges. Den som undrar över något kan också själv söka svar. Det handlar om den studerandes eget ansvar för sin utbildning. Detta hindrar naturligtvis inte att läroboksstudier borde vara ett viktigt inslag i metodikundervisningen.

Kunskap om elevers kunskaper måste anses tillhöra en av grundpelarna i lärarkunskapen. Det börjar genom den omfattande (internationella) matematikdidaktiska forskningen växa fram en substantiell kunskapsbas rörande karaktären och utvecklingen av skolelevers kunskaper i matematik (se t ex Grouws, 1992; Bishop, 1996; Nickson, 2000). Det är en angelägen uppgift för lärarutbildare i matematik att väva in detta i de grundläggande matematikdidaktiska kurserna, konkretiserat genom exempel hämtade från egna och kollegers erfarenheter (jfr Johansson, 1996, s. 8).

Hur långt/djupt en lärares ämneskunskaper borde gå utöver innehållet i de kurser läraren undervisar är en fråga som ofta diskuteras. De lärare som deltog i samtalet lade stor vikt vid goda ämneskunskaper. Denna syn kan vara ett resultat av dessa lärares egen utbildning (den "gamla" ämneslärarutbildningen, där man läste fullständiga akademiska grundkurser i ämnena). Med rejäla ämneskunskaper känner man sig säker på innehållet och kan därmed känna sig friare vid och lättare hantera den metodiska planeringen. En vanlig kommentar från elever är också att de uppskattar lärare som "kan allt".

De deltagande lärarkandidaternas bild av ämneskunskapens roll inom lärarkunskapen lyste inte tydligt igenom vid samtalet. Det är rimligt att förvänta sig att den kommer att utvecklas under utbildningens gång. De hade uppenbarligen svårt att se yrkesrelevansen åtminstone för en del av kursinnehållet i ämneskurserna de haft. Just detta faktum tyder på att deras kunskapsbild behöver mogna ytterligare, då det inte primärt är det specifika innehållet i varje kursmoment som är viktigt för en lärarstuderande (ur den för lärarkandidaten spontana kommentaren att det inte ingår i grundskolans kurs), utan det sätt på vilket matematiken hanteras.

Lärarkandidaterna genomförde under den period som det refererade samtalet ägde rum sin första "egentliga" praktik med egna längre undervisningssekvenser. De höll alltså på att slutföra den andra terminen av en nio terminer lång utbildning. Det är utifrån detta perspektiv de synpunkter som framfördes måste tolkas. Detta innebär att åsikterna kan ha formats lika mycket av förväntningarna på utbildningen som av vad som faktiskt har skett under detta utbildningens första år. Intrycken från de första kontakterna med eleverna i en lärarroll man håller på och *ska* utbilda sig i, är så konkreta och påtagliga att de kan ha en dämpande effekt på den betydelse utbildningens övriga moment synes ha. Det är praktiken, och därmed metodiken, som är det viktiga i utbildningen. Det kan då vara svårt att se det längre perspektivet, att när man har jobbat en tid och metodiken blivit (till stor del) rutin, kan det vara stabila ämneskunskaper och mer teoretiska didaktiska kunskaper som utgör grunden till en utveckling av den egna undervisningen och lärarrollen, tillsammans med den erfarenhet man skaffat sig.

Referenser

Bishop, A. et al (1996). *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Grouws, D. A. (Ed) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Johansson, B. (1996). Betyg på kvaliteter i kunnandet. *Nämnaren 23*(1), 4-9.

Nickson, M. (2000). *Teaching and learning mathematics. A teacher's guide to recent research and its applications*. London: Cassell.

/ Christer Bergsten

Inntrykk fra *SMDF´s* konferanse *MADIF3*

Norrköping den 23. og 24. januar 2002

For andre gang var jeg på vei til *MADIF*-konferanse i Sverige, denne gangen i Norrköping. Jeg hadde store forventninger på forhånd, siden *MADIF2* i Göteborg for to ar siden var så vellykket. Etter hvert kjenner jeg mange i det nordiske didaktikkmiljøet, så jeg visste at jeg ville treffe gamle venner, og helt sikkert stifte nye bekjentskaper. Da jeg nærmet meg plenumssalen, hørte jeg ivrig snakk på alle de skandinaviske språkene. Det er noe av det fine ved å komme til nordiske konferanser, det å kunne snakke ulike språk og allikevel forstå hverandre så godt, selv om det faglige programmet må foregå på engelsk.

Også i år kunne SMDF by på en rekke kjente og dyktige bidragsytere. Etter at Christer Bergsten hadde ønsket oss velkommen til det flotte universitets-området i de gamle fabrikksbygningene i Norrköping, var det Anna Sfard som var først på programmet med *There is more to discourse than meets the ears: Learning mathematics as developing a discourse.* Jeg har hatt gleden av å høre henne tidligere, og hadde store forventninger. Hun er veldig flink til å knytte de konkrete eksemplene og hendelsene i klasserommet til den teoretiske forankringen hun bygger forskningen på. Vi ble presentert for en oppgave som ble gitt til helt små barn, der de skulle identifisere trekanter. Noen av trekantene hadde en uvant form og liknet lite på det barna selv ville ha tegnet hvis de ble bedt om å tegne en trekant. Vi ble presentert for en dialog mellom elever som arbeidet med oppgaven, og Anna Sfards analyse av denne. Det ga mange tanker rundt dette med begrepsdannelse og betydningen av dialog i matematikkopplæringen. Dette var en god start!

Etter Anna Sfard var det flere parallelle sesjoner å velge mellom. Jeg valgte å gå og høre på Barbro Grevholms *Teachers' work in the mathematics classroom and their education. Is there a connection?*, hvor Anne Watson hadde lest abstraktet nøye på forhånd og skulle kommentere. Barbro har samlet masse materiale i form av observasjoner og intervjuer med sine tidligere læreerstudenter. De er observert i sin undervisningspraksis, for å se om deres måte å arbeide med barna i skolen på, er farget av den lærer-utdanningen de har fått. Det så ut til å være skremmende liten sammenheng mellom didaktikken de har arbeidet med som studenter, og det de viste som lærere i klasserommet. Barbro ba om kommentarer på sine data, og hvordan hun bør arbeide videre med dem. Anne Watson presiserte at dette var et svært viktig og interessant arbeid, men vanskelig å analysere i full bredde. Hennes råd til Barbro var å fokusere sin forskning, konsentrere seg om ett hoved-spørsmål, og la alt det andre interessante bare ligge. Dette ble bifallt fra salen, selv om alle skjønte dilemma i forhold til at det er spennende å studere og observere de tidligere studentene i full bredde.

Så var det kaffe, hvor samtalene gikk ivrig rundt det man nettopp hadde opplevd. Selv ble jeg huket tak i av en indignert Ulla Runesson som lurte på hvorfor jeg ikke hadde vært hennes ”kritiske venn” under hennes presentasjon. Det ville jeg selvsagt gjerne ha vært, men her hadde noen stolt for mye på e-mail!

Etter kaffe var det det tid for Ole Björkqvist, som har hatt i oppdrag å kartlegge hvor Sverige står innenfor matematikkdidaktisk forskning. Tittelen på hans forelesning var *Mathematics education in Sweden: A review of research and developmental work.* Det var en engasjert og dyktig framføring av svensk forknings styrker og svakheter. Ole kunne fortelle at mye av arbeidet har hatt karakter av utviklingsarbeid, der nytteaspektet går igjen i arbeidene som har blitt produsert. Svenskene har vært flinke til å orientere seg på den internasjonale arenaen, og har latt seg påvirke av ulike tradisjoner. Han fremholdt visse områder der svenske forskere har hatt en framtredende stilling og nevnte spesielt genusspørsmål, fenomenografiske analyser av oppfatninger i matematikk, matematikk og demokrati, og matematikk/matematikk-undervisningens historie. Ole mente videre at svenske forskere innen kort tid vil gjøre seg bemerket innen områder som datastøttet læring, problemløsning i gymnasiematematikken, symbolforstå-else og det matematiske språket.

Den siste programposten før Happy Hour og konferansemiddag, var igjen parallelle sesjoner. Det er alltid vanskelig å velge mellom mange gode tilbud. Denne gengen valgte jeg å gå på tematisk gruppediskusjon med Anne Watson, tema: *Mathematical thinking and achievement.* Anne utfordret oss på noen morsomme oppgaver om kvadrattall, så vidt jeg husker. Det var utrolig engasjerende og spennede å se hvordan vi som var til stede tenkte ulikt og oppdaget ulike ting. Det ble etter hvert en livlig diskusjon som er vanskelig å rekonstruere. Anne er veldig dyktig til å få folk til å engasjere seg, og veldig flink til å stille gode spørsmål tilbake.

Happy Hour og konferansemiddag med gamle og nye venner må jo bli vellykket. Vi fikk til og med underholdning med sjonglering til maten! Men dagen etter skulle vi få nye spennende impulser med forelesninger og gruppediskusjoner, og ikke minst den avsluttende paneldebatten. De fleste tok en tidlig kveld.

Dag to begynte med en spennende plenumsforelesning av en engasjert Jan de Lange fra Freudenthal Institute i Nederland. Tittelen på hans bidrag var *Realistic mathematics education – Theory/Practice/Development/Implementation*. Vi fikk et slags historisk tilbakeblikk over Freudenthalinstituttets virksomhet, fra en spe start med få medarbeidere til det store og internasjonale foretak det er i dag. Jeg merket meg spesielt det han sa om at noe av grunnen til suksess og rask implementering av instituttets forskningsbaserte undervisningsopplegg, var at alt som kommer fra instituttet, blir pøst gratis ut til lærerne i skolen. Med undervisningsoppleggene følger gjerne også evalueringsinstrumenter, slik at lærerne kan bli forvisset om at elevene lærer det de skal. Dette er erfaringer jeg vil ta med meg når vi åpner et Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen i Trondheim i august.

Etter å ha deltatt på gruppediskusjonen til Thomas Lingefjärd og Jeff Evans med tema *Mathematical thinking and emotion*, fulgte nå, i alle fall for mitt vedkommende, siste programpost. Det var paneldebatten om relasjonen mellom teori og praksis i det matematikkdidaktiske forskningsfeltet. Debatten ble ledet på en profesjonell og engasjerende måte av Rudolf Sträβer, og i panelet satt John Mason, Barbro Grevholm og Morten Blomhøj. Alle innlederne var inne på at hensikten med å utvikle teorier, er å forbedre praksis. Hvordan er det da allikevel slik at teorier av og til ser ut til å leve sitt eget liv? Uansett må det være forskerens plikt å hele tiden tenke på relevansen i forhold til praksis. Det ble også vist eksempel på at utviklingsarbeid som ikke tar utgangspunkt i noen bestemt teori, kan gi opphav til ny teori. Da er det vel kanskje slik at enhver praksis bygger på lærerens personlige teori? Dette er et tema som vil bli tatt videre i en nordisk konferanse som arrangeres i Trondheim den 18. og 19. november i år, med tittelen *Utvikling av matematikkundervisning i samspill mellom praksis og forskning – Nye arbeidsformer i matematikkundervisningen.*

Etter denne delen av programmet, gikk jeg til *Biennalen*. Jeg hadde stort utbytte av å delta, både på *MADIF3* og *Biennalen*, og gleder meg til å komme tilbake til *MADIF4*. Men lenge før det, håper jeg å se mange av *SMDF*´s medlemmer i Trondheim i november!

/ Ingvill M. Holden

Några tankar från MADIF3 – *Forum för unga forskare*

Onsdagen den 23 till fredagen den 25 januari samlades Sveriges ”äldre” och ”yngre” matematikdidaktiker till SMDFs tredje konferens i Norrköping. Termen äldre respektive yngre behöver inte nödvändigtvis hänvisas till ålder i människoår utan snarare till ålder inom det matematikdidaktiska fältet. Anledningen är att många av deltagarna på årets konferens kom från den nya forskarskolan i matematikdidaktik. Till denna ”unga” publik hade även en speciell programpunkt skapats, *Forum för unga forskare*, som en sista del i MADIF3 innan Biennalen helt tog över. Detta *Forum* bestod av två delar, en del där deltagarna under ledning av professor Gilah Leder från Australien presenterade sina preliminära forskningsidéer och fick synpunkter samt en andra del under ledning av John Mason och Anne Watson båda från England med innehållet 'Tensions and potentials for new classroom researchers':

> "*New researchers often have backgrounds as teachers, learners, teacher -educators, parents and other roles in classrooms. In this session we are going to explore how the shift from previous perspectives to research perspectives creates both tensions and potentials, and how these might be negotiated.*"

Till den första delen av forumet var vi sju unga forskarstuderande som prövade lyckan, dvs höll en presentation om vårt forskningsintresse, en erfarenhet som jag tror vi alla kommer att kunna dra nytta av i vårt fortsatta arbete. För många av oss var det första gången vi presenterade vår forskningsfråga och nervositeten var påtaglig. Den största nyttan med att presentera sitt intresse vid en konferens i ett så här tidigt skede, tror jag är att man tvingas förtydliga sina tankar. Tankar som verkar så tydliga fram till dess att man skall formulera dem på papper och presentera dem inför en kritisk (om än i detta fall en väldigt trevlig) publik. Många av de synpunkter man får verkar självklara och man blir förvånad över att man inte lyckats formulera dem själv. Ett tecken på att det man presenterat missförståtts och att man kanske trots allt inte varit så tydlig som man önskat, är att många av de synpunkter som förs fram inte direkt berör det som man själv tycker sig formulerat så tydligt. Ytterligare en nyttig erfarenhet är att synpunkterna i ett så här tidigt skede ofta blir väldigt generella och de förväntningar man hade kring att få expertishjälp kanske var lite högt ställda. För att få mer direkt vägledning krävs i många fall att man kommit betydligt längre i sin precisering och formulering av det man intresserar sig för. Det är dessutom lärorikt att öva på att ta emot kritik, tänka efter och fundera över vad som egentligen sägs för att på bästa sätt utnyttja det till att komma framåt i sina funderingar.

Summasummarum kan sägas att båda delarna i programpunkten, Forum för unga forskare, under ledning av Gilah, John och Anne fungerade utmärkt. Stämningen var trevlig och kritiken och synpunkterna som framfördes var värdefulla, ett seminarium alltigenom lyckat.

/ Jesper Boesen

Kvinnor och matematik, den femte konferensen

Nätverket Kvinnor och matematik bildades på våren 1990 vid en konferens i Malmö och har sedan dess hållit regelbundna konferenser vart tredje år. I år var det alltså dags för femte gången och den 12-14 april gick det hela av stapeln vid högskolan i Kristianstad. Professor Gilah Leder från la Trobe University i Melbourne inledde och talade om *Are girls measuring up?* Hon beskrev hur väsentliga förändringar i högstadiets och gymnasieskolans matematikkurser har påverkat inlärningsresultaten för flickor och pojkar, hur elevers uppfattningar av ämnet verkar förändras samt vilka fördelar och nackdelar för lärare och elever hon ser i en utveckling över en längre tid.

Marj Horne från Melbourne, som arbetat en tid på NCM föreläste om *Mathematics and Gender: A decade of change in Australasia*. Hon gav en god översikt över utvecklingen sedan Kay Owens presentation vid konferensen i Göteborg 1996. Hon pekade framför allt på hur de kritiska frågorna har förändrats. Fokus är inte längre så starkt på flickors deltagande i matematikundervisning. Intresset är ännu riktat på hur undervisningen leds och planeras samt på praktiken i klassrummet.

Lars-Erik Persson från Luleå tekniska universitet berättade om och gav smakprov från en doktorandkurs i Tillämpad matematik, som han utarbetat och gett i Luleå och Uppsala till doktorander i andra ämnen än matematik. Många i auditoriet önskade att de själva kunde få gå en kurs av det slaget.

Britt Lindahl gör en longitudinell studie om elevers syn på naturvetenskap och teknik genom att följa tre klasser från årskurs fem till årskurs nio. Hon vill veta mer om sambandet mellan intresse, förståelse och förmåga och hur intresset förändras över åren samt slutligen vad som avgör valet till gymnasieskolan. Hon har funnit att intresset och självförtroendet är mycket sämre i matematik än i engelska. Eleverna har just valt till gymnasiet men få av de duktiga eleverna har valt NV-programmet.

I de parallella presentationerna talade Barbro Grevholm om Louise Petrén, första kvinnan i Sverige som erövrade doktorsgrad i matematik. Lisbeth Lindberg föreläste om Tatiana Ehrenfast-Afanassjewa, en av de tidiga matematikdidaktikerna i Nederländerna. Lars-Erik Persson berättade mer om sina personliga erfarenheter av samarbete med kvinnor i matematiken. Britt-Marie Stocke föreläste om Sofia Kowalevskaia och Catarina Rudälv om *Sagan om pi eller är vi inte noggranna nog?* Laura Fainsilber frågade sina lyssnare *Hur långt är det mellan 3 och 5? Mellan mig och min kusin?* Gilah Leder och Gerd Brandell rapporterade från sitt forskningsprojekt *Mathematics as a male domain – The Fennema-Sherman scale in a new perspective.*

Vi två tillfällen arbetade deltagarna i sex olika arbetsgrupper och följde därmed traditionen från tidigare konferenser och i viss mån följdes samma diskussionsfrågor upp.

Deltagarna från Umeå har tagit på sig att ordna den sjätte konferensen som blir om tre år, 2005. Notera det i din kalender redan nu. Avslutningsvis visades nätverkets video *Formler och fantasi*, som nu finns på landets alla AV-centraler. Till den har nyligen även utkommit en handledning för läraren, som innehåller intervjuerna med sex kvinnliga matematiker, sångtexterna, kort historik om kvinnliga matematiker, något om forskning rörande genus och matematik samt förslag till diskussionsfrågor att arbeta med tillsammans med elever som sett videon. Handledningen kan beställas från Nätverket till en liten kostnad för porto och tryck.

/ Barbro Grevholm

Senaste nytt från *Forum for matematikkens didaktik*, vår danska systerförening

I mars 2002 presenterades projektet *Kompetencer og matematiklaering* vid ett möte i Odense. Professor Mogens Niss har lett arbetsgruppen, som genomfört ett analytiskt utvecklingsprojekt och han underströk att det inte handlar om ett forskningsprojekt. Utgångspunkten är matematisk kompetens definierad som en insiktsfull beredskap att handla omdömesgillt i situationer som innehåller ett viss slags matematiska utmaningar. De åtta kompetenser som presenterades är delade i två grupper

1. Att fråga och svara i, med och om matematik

- kompetens när det gäller tankegångar
- kompetens att behandla problem
- kompetens att modellera
- kompetens att resonera

2. Att hantera matematikens språk och redskap

- kompetens när det gäller representationer
- symbol- och formalismkompetens
- kommunikationskompetens
- kompetens när det gäller hjälpmedel

I den diskussion som följde tog man upp vad KOM-projektet kan användas till. Niss menar att det kan brukas i arbetet med omstrukturering av matematikutbildningar, för läroplaner och kursplaner, för att beskriva vad ämnesmässighet innebär. Det bör även göra det möjligt att föra bort diskussionen från snäva färdigheter i ämnet till en bredare debatt om ämnet i folkskolan. En preliminär rapport finns på http://mmf.ruc.dk/kom

Rapporten ges ut i bokform och den ska komma i august 2002. Projektet kommer att uppmärksammas även i Sverige och bör vara ett av gymnasiekommitténs underlag och även ge impulser till arbetet i matematikdelegationen. Läs och ta del och ge dig tillkänna med synpunkter här i vårt medlemsblad.

Forum har även ordnat en konferens på temat Integration av *IT i matematikundervisning – möjligheter och konsekvenser*. Den rapport som planerats från den konferensen ska inte ges ut pga olika omständigheter. Istället publiceras ett av bidragen i sin helhet i Forums nyhetsblad från april 2002. Inge B Larsen vid Danmarks Pedagogiska Universitet skriver om IT i folkeskolens matematikundervisning. Intresserade kan vända sig till ibl@dpu.dk

Slutligen noterar vi att man i Danmark är på väg att starta en ny förening för intresserade av FVU matematik. FVU står för Forberedande Voksen Undervisning. Kontakta rezafarzin@hotmail.com för mer information om föreningen.

/ Barbro Grevholm

Anslagstavlan

Aktuella konferenser

ICTM2 (2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level), Hersonnissos, Kreta, 1-6 juli 2002
http://www.math.uoc.gr/~ictm2/

PME 26 (26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education), Norwich, England, 21-26 juli 2002
http://www.uea.ac.uk/edu/pme26/

CERME 3 (Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Bellaria, Italien, 28 feb-3 mars 2003
http://fibonacci.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/
(SMDF:s medlemmar uppmanas att medverka med bidrag, mycket givande konferensform)

Nordic pre-conference to ICME 10, Växjö 9-11 maj 2003
http://www.msi.vxu.se/picme10/

ICME10 (The 10'th International Congress on Matematical Education), Köpenhamn 4-11 juli 2004. *First announcement* finns nu tillgängligt på
http://www.icme-10.dk/

Telefoner och e-postadresser till funktionärerna i SMDF:s styrelse 2002

Ordförande	Barbro Grevholm	044-203427	barbro.grevholm@mna.hkr.se
Vice ordförande	Christer Bergsten	013-282984	chber@mai.liu.se
Kassör	Thomas Lingefjärd	031-7732253 031-7724994	thomas.lingefjard@ped.gu.se tholing@math.chalmers.se
Sekreterare	Ulla Runesson	031-7732373	ulla.runesson@ped.gu.se