

S MDF

Svensk Förening för MatematikDidaktisk Forskning

MEDLEMSBLAD

Nr 18

Januari 2012

INNEHÅLL

Medlemsblad nr 18 ... (<i>Kristina Juter</i>)	1
Några rader från ... (<i>Christer Bergsten</i>)	2
Matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet ... (<i>Kerstin Pettersson</i>)	5
Rapport från MAVI 17 ... (<i>Hanna Palmér</i>)	8
Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor ... (<i>Eva Pettersson</i>)	11
Lärares aktiva arbete för en förändrad matematikundervisning ... (<i>Ylva Jannok Nutti</i>)	14
Ansvar för matematiklärande - Effekter av undervisningsansvar i det flerspråkiga klassrummet ... (<i>Åse Hansson</i>)	18
Begreppsbildning i matematik ... (<i>Jörgen Sjögren</i>)	23
Att förstå genom att se ett mönster ... (<i>Paulina Lindström</i>)	27
Ny litteratur ... (<i>Kristina Juter</i>)	31
E-postadresser	32

Medlemsblad nr 18

I detta nummer av SMDF:s medlemsblad fortsätter vi med presentationer av Sveriges matematikdidaktiska forskningsmiljöer. Kerstin Pettersson berättar denna gång hur forskningsmiljön vid Stockholms universitet är sammansatt och vilka forskningsaktiviteter som bedrivs där. Vi fortsätter med nya presentationer i kommande nummer.

Hanna Palmér har varit på MAVI17-konferensen i Bochum i Tyskland i september. Hon ger exempel på vad som behandlades på konferensen och vilka som var där.

Vår vana trogen presenterar vi nya doktorsavhandlingar i matematikdidaktik i bladet. Ylva Jannok Nutti, Eva Pettersson, Åse Hansson, Jörgen Sjögren och Paulina Lindström har skrivit egna presentationer av sina avhandlingar. Mer om avhandlingarna och disputationerna finns på www.skolporten.se. Vi gratulerar de nya doktorerna!

Nytt för detta nummer är en avdelning som vi kallar Ny litteratur. Har du något tips om någon nyutkommen bok som du vill dela med dig så är du välkommen att skriva om den i kommande nummer av medlemsbladet.

Har du något intressant att berätta som rör matematikdidaktisk forskning så tag kontakt med undertecknad på adressen längst bak i medlemsbladet.

/ Kristina Juter

Några rader från ...

När jag skriver dessa rader är det bara en vecka kvar till MADIF8 i Umeå. Det kommer att bli en spännande konferens med ett tema som är både aktuellt och angeläget: Utvärdering och jämförelser av prestationer i matematik: dimensioner och perspektiv. I den testvåg som väller fram är det nödvändigt med vågbrytare i form av en forskningsbaserad kritisk diskussion av mål, metoder, ideologier och konsekvenser av ”bedömningsindustrins” olika aktörer.

Då jag vid SMDF:s årsmöte i samband med MADIF8 slutar som ordförande för SMDF känns det naturligt att göra en kort historisk tillbakablick. Den första konferensen med namnet MADIF, som jag valde som en förkortning av *MAtematikDIdaktisk Forskning*, var den eftermiddagskonferens som ägde rum i anslutning till att SMDF grundades. Detta var på Campus Konradsberg i Stockholm den 22 januari 1999. Tanken på en förkonferens till Matematikbiennalen realiserades dock redan året innan, i anslutning till biennalen i Sundsvall 1998. Det var vid denna ”Minikonferens” som beslutet togs att bilda en arbetsgrupp för att förbereda bildandet av en svensk förening för matematikdidaktisk forskning. Redan vid den första större MADIF-konferensen, MADIF2 i anslutning till Matematikbiennalen i Göteborg år 2000, fann SMDF:s regelbundet återkommande seminarium det format med en blandning av internationella gäster och nationella forskare, forskarstuderande, lärarutbildare och lärare som har skapat den öppna och lättsamma atmosfär som karakteriserat MADIF. Trots det tidsmässigt korta programmet har det funnits tid för diskussioner vid och mellan de olika passen. Genom åren har ett stort antal personer bidragit till att göra MADIF till ett etablerat forskningsseminarium med ett okomplicerat diskussionsklimat och en öppen atmosfär.

Följande 44 personer (i bokstavsordning) har medverkat/ska medverka vid plenaraktiviteter (föredrag, paneldebatter, temapass, forum för unga forskare, mm) från och med MADIF1 till och med MADIF8:

Michèle Artigue, Christer Bergsten, Ole Björkqvist, Morten Blomhøj, Werner Blum, Jo Boaler, Gerd Brandell, Jan de Lange, Göte Dahland, Paul Dowling, Willi Dörfler, Jeff Evans, Barbro Grevholm, Kathleen Heid, Ingvill Holden, Celia Hoyles, Eva Jablonka, Barbara Jaworski, Jeremy Kilpatrick, Gilah Leder, Håkan Lennerstad, Steve Lerman, Frank Lester, Thomas Lingefjärd, John Mason, William McCallum, Tamsin Meaney, Richard Noss, Terezinha Nunes, Peter Nyström, Erkki Pehkonen, Astrid Pettersson, Norma Presmeg, Anna Sfard, Yoshinori Shimizu, Jeppe Skott, Roger Säljö, Åse Streitlien, Rudolf Strässer,

Rosamund Sutherland, Paola Valero, Anne Watson, Tine Wedege och Inger Wistedt. I dokumentationerna från MADIF2 till och med MADIF7 har 73 forskningsrapporter publicerats (vid MADIF8 kommer 21 forskningsrapporter och 15 korta presentationer att presenteras och diskuteras) samt ytterligare ett antal kortare rapporter och korta presentationer. Följande 103 personer har stått som författare/medförfattare till forskningsrapporter som presenterats och publicerats genom MADIF (inklusive MADIF8):

Hoda Agahi, Ann Ahlberg, Merethe Anker-Nilssen, Lena Aretorn, Mike Askew, Iris Attorps, Anette Bagger, Samuel Bengmark, Per-Olof Bentley, Benita Berg, Jonas Bergman Ärlebäck, Ewa Bergqvist, Tomas Bergqvist, Christer Bergsten, Kristin Bjarnadottir, Kjell Björk, Lisa Björklund Boistrup, Jesper Boesen, Rita Borromeo Ferri, Lars Burman, Doug Clarke, Bettina Dahl, Anneli Dyrvold, Arne Engström, Elsa Foisack, Peter Frejd, Torbjörn Fransson, Sharada Gade, Gunnar Gjone, Barbro Grevholm, Kerstin Hagland, Rolf Hedrén, Milan Hejny, Kirsti Hemmi, Ingemar Holgersson, Mikael Holmquist, Marj Horne, Brian Hudson, Johan Häggström, Eva Jablonka, Darina Jirotkova, Bo Johansson, Maria Johansson, Kristina Juter, Sinikka Kaartinen, Gulden Karakok, Cecilia Kilhamn, Jan-Åke Klasson, Anna Klisinska, Marie Kubinova, Troels Lange, Håkan Lennerstad, Lisbeth Lindberg, Krister Lindwall, Thomas Lingefjärd, Johan Lithner, Graham Littler, Sverker Lundin, John Mason, Alistair McIntosh, Tamsin Meaney, Lars Mouwitz, Per Nilsson, Stefan Njord, Elisabeth Nordevall, Eva Norén, Guri A. Nortvedt, Mikaela Nyroos, Constanta Olteanu, Torgny Ottosson, Torulf Palm, Björn Palmberg, Hanna Palmér, Per-Eskil Persson, Kerstin Pettersson, Miko Radic, Eva Riesbeck, Mikaela Rohdin, Ulla Runesson, Frode Rønning, Alexandre José Santos Pais, Eva Silfver, Gunnar Sjöberg, Håkan Sollervall, Daniel Spikol, Erika Stadler, Nada Stehlikova, Diana Stentoft, Rudolf Strässer, Lovisa Sumpter, Gunilla Svingby, Attila Szabo, Eva Taflin, Allan Tarp, Hans Thunberg, Paola Valero, Olof Viirman, Anne Watson, Tine Wedege, Anna Wernberg, Mikael Winberg och Magnus Österholm.

Dokumentation från SMDF:s och MADIF:s historia finns tillgänglig på föreningens hemsida matematikdidaktik.org (klicka på länken ”Arkiv” under rubriken ”Om SMDF”). Förutom MADIF har SMDF arrangerat ytterligare några seminarier där till exempel ett har gett en output i form av boken Matematiska språk (publicerad på Santérus förlag).

Denna korta historiska tillbakablick visar tydligt att SMDF genom sina aktiviteter spelat en central roll för att ge den matematikdidaktiken i Sverige ett forum för presentation och diskussion av forskning samt för kommunikation nationellt och internationellt. Detta har gällt inte minst ”nybörjare” i fältet, där dock inget speciellt arrangemang riktats mot forskarstuderande sedan MADIF3

för tio år sedan där en särskild halvdag (*Forum for young researchers*) leddes av Gilah Leder, John Mason och Anne Watson (se s. 83 i Proceedings från MADIF3, *Challenges in mathematics education*). När det gäller framtida SMDF-arrangemang är detta något att tänka på. Sedan SMDF startade 1999 har antalet personer som ägnar sig åt matematikdidaktisk forskning i Sverige ökat kraftigt (se t.ex. det inledande kapitlet till den svenska delen i *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education*) parallellt med att området etablerats som en akademisk disciplin genom inrättandet av professorer med namnet matematikdidaktik eller liknande, vilket inte fanns tidigare. Samtidigt genomgår svensk matematikutbildning just nu stora förändringar inom alla nivåer och är föremål för mycket debatt där forskning ofta nämns men inte verkar efterfrågas. Det är därför angeläget att SMDF aktivt diskuterar hur verksamheten kan inriktas för att fortsätta spela en aktiv roll för en positiv utveckling av svensk matematikdidaktik. I SMDF:s verksamhetsplan för 2012 föreslås därför bland annat att ett nytt återkommande seminarium äger rum de år då det inte är ett MADIF-seminarium, med svenska som huvudspråk. Modellen är hämtad från de engelska BSRLM-konferenserna (se föreningens hemsida www.bsrlm.org.uk/events.html). För att vår förening ska bli mer synlig i debatten och en röst man lyssnar på är det nödvändigt att dess medlemmar är aktiva i föreningens inre debatt, i medlemsblad och på hemsidan, och att matematikdidaktiker ser det som naturligt att vara medlemmar. Jag hälsar de nya medlemmar som sökt sig till föreningen det senaste året varmt välkomna och hoppas att även "gamla" medlemmar fortsätter att arbeta för den matematikdidaktiska forskningen genom SMDF. Med dessa ord tackar jag för min tid som ordförande i SMDF.

/ Christer Bergsten, ordförande i SMDF

Matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet

Kerstin Pettersson

Stockholms universitet har en expansiv matematikdidaktisk forskningsmiljö. Forskargruppen har utökats de senaste åren genom extern rekrytering, egna doktoranders disputationer samt ett utökat antal doktorander och licentiander. Rekrytering av ytterligare forskare pågår.

Vår forskning bedrivs vid en ämnesdidaktisk institution med många uppdrag inom lärarutbildning och skola. Vi vill både bygga upp en kunskapsbas inom relevanta områden och att resultaten av vår forskning ska vara tillämpliga och till nytta för utbildningsväsendet.

Vår forskning utgår från tre huvudinriktningar (bedömning, flerspråkighet och begrepp) och är idag mycket mångfacetterad. Forskningen spänner över ett flertal områden och vi utgår från flera teoretiska perspektiv. Nedan följer en beskrivning av vår forskningsmiljö, våra intressen, vilka vi är och några exempel på pågående projekt.

Vår forskning handlar om:

- bedömning på nationell och internationell nivå samt klassrumsbedömning
- elevers kunskapsutveckling
- elever med fallenhet för matematik
- elevers och lärarstudenters identitetsskapande
- flerspråkiga elevers lärande
- lärares utveckling och undervisningsval
- matematiska förmågor
- stadieövergångar
- tröskelbegrepp och elevers begreppsuppfattningar

Vår forskning använder:

- konstruktivistiska teorier
- sociokulturella teorier
- sociopolitiska teorier

Vår forskning berör:

- elever i grundskolan
- elever i gymnasieskolan
- matematiklärare

- universitetsstudenter, särskilt lärarstudenter
- vuxna i yrkeslivet

Vi forskare och våra forskningsområden:

Astrid Pettersson, Professor, Bedömning, elevers kunskapsutveckling över tid
Inger Wistedt, Professor, Elever med fallenhet för matematik (gifted education)

Candia Morgan, Professor, Sociala perspektiv, diskursanalys, matematik och språk

Gudrun Brattström, Docent

Torbjörn Tambour, Docent

Annica Andersson, FD, Elevers identitetsskapande

Lisa Björklund Boistrup, FD, Klassrumsbedömning, vuxnas matematik

Eva Norén, FD, Flerspråkiga elevers lärande

Kerstin Pettersson, FD, Studenters begreppsuppfattningar av tröskelbegrepp

Erika Stadler, FD, Övergång gymnasium-högskola, matematiklärare

Kerstin Larsson, Doktorand, Elevers förståelse av subtraktion

Anna Pansell, Doktorand, Matematiklärares undervisningsval

Jöran Petersson, FL, Doktorand, Flerspråkiga elevers lärande

Kicki Skog, Doktorand, Lärarstudenters identitetsskapande

Samuel Sollerman, Doktorand, Bedömning, nationella prov

Werner Gerholm, Licentiand, Gymnasieelevers användande av tekniska hjälpmedel

Anna-Karin Nordin, Licentiand, Utveckling av elevers resonemangsförmåga

Cecilia Sträng, Licentiand, Matematiklärares utveckling i skolutvecklingsprojekt

Attila Szabo, Licentiand, Högpresterande elevers matematiska förmågor

Niclas Larson, FL, Doktorand, Linköpings universitet, Stadieövergång högstadium-gymnasium

Oduor Olande, Doktorand, Mittuniversitetet, Elevers tolkning och förståelse av diagram

Sanna Wettergren, Licentiand, Inst för ped och did, SU, Lärares bedömning av elevers kunskaper

På vår institution finns också *PRIM-gruppen*, Forskningsgruppen för bedömning av kunskap och kompetens. För mer information se PRIM-gruppens hemsida där också pågående forskningsprojekt inom gruppen redovisas:

<http://prim-gruppen.se/>

Exempel på pågående projekt:

- Bedömning i matematikklassrum: Elevers (o)lika villkor (Lisa Björklund Boistrup, Eva Norén)

- En kvantitativ studie av stadieövergången vid tre svenska lärosäten (Erika Stadler)
- Flerspråkiga elevers lärande (Eva Norén, Jöran Petersson)
- Gifted education (Inger Wistedt, Attila Szabo, Werner Gerholm)
- Longitudinell studie av lärarstudenters uppfattningar av funktionsbegreppet (Kerstin Pettersson)
- Matematiklärares utveckling av en professionell identitet under de första yrkesverksamma åren (Erika Stadler)
- Studenters förhållningssätt till lärande och studier (Kerstin Pettersson)
- Vuxnas matematik i yrkeslivet (Lisa Björklund Boistrup)

Läs mer om oss:

Vår hemsida

<http://www.mnd.su.se/pub/jsp/polopoly.jsp?d=10550>

Presentation av Astrid Pettersson

<http://www.mnd.su.se/pub/jsp/polopoly.jsp?d=10550&a=42704>

Presentation av Inger Wistedt

<http://www.mnd.su.se/pub/jsp/polopoly.jsp?d=10550&a=83696>

Läs mer om Gifted education: www.giftedmath.se

Presentation av Candia Morgan

<http://www.mnd.su.se/pub/jsp/polopoly.jsp?d=10550&a=83686>

Avhandlingar:

Annica Andersson

http://ncm.gu.se/media/ncm/forskning/a_andersson_avhandling.pdf

Lisa Björklund Boistrup

<http://su.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:355024>

Eva Norén

<http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?searchId=1&pid=diva2:357471>

Kerstin Pettersson

<http://www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints/Doctoral/2008/1.pdf>

Erika Stadler

<http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?searchId=1&pid=diva2:286375>

/ Kerstin Pettersson

Rapport från MAVI 17

Hanna Palmér

MAVI står för *Mathematical Views* och den första MAVI-konferensen genomfördes 1994 som ett resultat av ett samarbete mellan Universitetet i Helsingfors (Finland) och Duisburg (Tyskland). Syftet med konferensen, då och nu, är att sprida och diskutera forskning gällande *beliefs* och *affect*. De första fyra åren genomfördes två konferenser per år där platsen varierade mellan Helsingfors och Duisburg. Deltagarna kom dock från fler länder och sedan 1998 har konferensen genomförts en gång per år på olika platser i Europa (två gånger i Sverige).

Den 17:e MAVI-konferensen genomfördes 17-20/9 på Ruhr Universitetet i Bochum, Tyskland. Båda de ursprungliga initiativtagarna till konferensen 1995, Erkki Pehkonen och Günter Törner, fanns på plats. Deltagarna på konferensen kom från Finland, Italien, Kanada, Tyskland, Australien, Ungern, Spanien, Israel, England, Estland, Sverige och Danmark. På konferensen presenterades och diskuterades 16 peer reviewed konferenspaper vilka finns att läsa på:
<http://www.ruhr-uni-ochum.de/ffm/Lehrstuehle/Roesken/mavi17.html>.

Bland presentatörerna fanns såväl väletablerade som yngre forskare. Både resultat från studier såväl som mer teoretiska paper presenterades. Jeppe Skott (Sverige/Danmark) utmanade *beliefsbegreppet* i sin presentation vilket väckte diskussion. Ett annat bidrag som väckte mycket diskussion var Peter Liljedahls (Kanada) presentation *The theory of conceptual change as a theory for changing conceptions*.

Avhopp från matematikstudier var ett återkommande tema. Chiara Andrà (Italien) presenterade en studie där man via samtal med avhoppade studenter försöker hitta faktorer som hade kunnat få de studerande att stanna kvar i utbildningen. Birgit Griese (Tyskland) presenterade en studie där olika grupper ingenjörstudenter inom en och samma matematikkurs erbjuds olika typer av stöd. I studien försöker man se vilken typ av stöd som fungerar bäst för att studenterna ska klara sina matematikstudier och stanna kvar i utbildningen.

Utformning av matematikuppgifter var fokus i två paper från Israel. Igor Kontorovichs studie fokuserade utgångspunkterna för de problem som skapas för matematiktävlingar medan Esther Levenson studerat hur lärare i matematikfortbildning uppfattar kreativitet i matematikuppgifter. Leena Heinilä

och Erki Pehkonen (Finland) presenterade ett varsitt paper från samma projekt där grundskoleelevers *matematikbilder* och *matematikberättelser* används som utgångspunkt.

Det var endast ett axplock av presentationerna. För den intresserade finns samtliga paper att läsa via länken ovan. MAVI-18 kommer genomföras i Helsingfors i maj 2012.

/ Hanna Palmér

Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor

Eva Pettersson

Eva Pettersson disputerade 2011-05-18 vid institutionen för datavetenskap, fysik och matematik, Linnéuniversitetet.

Studien handlar om barn och ungdomar som ofta förvånar och fascinerar sin omgivning – elever med exceptionell fallenhet för matematik. De är sinsemellan olika, lika olika som alla andra individer i samhället, men de har ett gemensamt: intresse för matematik och att få syssla med matematiska aktiviteter. I studien beskrivs vad som karakteriserar dessa elever, deras olika sätt att uttrycka sina förmågor samt hur de bemöts i den svenska skolan.

Är den svenska skolan till för alla elever? Får nyfikna och vetgiriga barn det stöd och den stimulans som de har rätt att förvänta sig då de börjar skolan eller är skolan till för de elever som är ordentliga och flitiga men inte krävande?

Särskild matematisk förmåga definieras i studien som ett komplex av olika förmågor som alla kan vara mer eller mindre uttalade hos en individ. Studien baseras på tio fallstudier av elever i åldrarna 6-19 år. Sex av studierna är longitudinella (tre till sex år). För att validera resultaten av fallstudierna genomfördes två enkätstudier: en där 180 lärare, från förskola till årskurs 9, fick svara på frågor om sin egen matematikundervisning och personliga erfarenhet av att identifiera och stödja begåvade elever, och en riktad till 284 matematik-utvecklare, lärare som har som uppgift att utveckla matematikundervisningen i sina hemkommuner, som fick svara på frågor om de i deras kommun eller lokalt på skolan har någon handlingsplan för att bemöta/ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik.

Avhandlingens övergripande syfte är att beskriva och belysa studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor. Forskningsfrågorna som ställs är:

- Vad karakteriserar elever med särskilda matematiska förmågor?
- Vilket bemötande i skolan får elever vilka visar intresse och fallenhet för matematik?
- Vad innebär skolans bemötande för eleverna och för deras möjligheter att utveckla sina särskilda matematiska förmågor?

Karaktäristiken av eleverna avser dels deras personliga egenskaper, bakgrund och nuvarande sociala situation dels deras matematiska förmågor så som de kommer till uttryck i skola, hem och övrig vardag. Bemötandet i skolan avser både de möjligheter eleverna har att uttrycka och utveckla sina särskilda förmågor i matematik under klassrumslektioner eller i enskilda samtal med lärare eller speciallärare men också vilket extra stöd som erbjuds dessa elever.

Vad karaktäriserar elever med särskilda matematiska förmågor?

Resultatet av studien visar att elevernas personlighet varierar liksom sätten att uttrycka matematiska förmågor. Det går alltså inte att se de begåvade eleverna som en homogen grupp. Resultaten av fallstudierna visar dock, precis som tidigare forskning, att det finns gemensamma drag hos eleverna och deras omgivning. Nyfikenheten är den egenskap som är mest framträdande, vilket framgår både av föräldrarnas berättelser om sina barn och i mina intervjuer och observationer av eleverna. I studien framgår att det är viljan att förstå som driver och motiverar eleverna att fortsätta fråga och vara nyfikna, i många fall trots att de känner sig motarbetade. Men här finns även elever som visar lättja vilket kan vara en följd av att de mött för få utmaningar under sina tidigare studier, resultat som överensstämmer med tidigare forskning.

Flera av barnen utmärkte sig tidigt och analyser av episoder där föräldrarna i intervjuer berättar om sina barns matematikintresse visar att föräldrarna redan tidigt i barnets utveckling upptäckt några av de förmågor och egenskaper som kännetecknar utpräglad matematisk förmåga. Främst är det ivern att behärska kunskapsområdet och ett matematiskt sinnelag, d.v.s. generella matematiska förmågor som tidigt framträder. Men även här finns variation. Att vissa elever inte utmärker sig förrän senare i livet (i internationell litteratur kallade "late bloomers"), kan ha sin grund i att undervisningen inte gjort det möjligt för dem att uttrycka och utveckla matematiska förmågor. De gör vad som krävs av dem och klarar detta på ett utmärkt sätt, men om ingen ytterligare stimulering ges sker ingen utveckling även om individen har fallenhet för ämnet. Några av eleverna är lugna, behärskade och framstår som betydligt äldre än de är medan andra är frågvisa, pådrivande och ibland något stökiga. Ett lugnt och behärskat beteende kan vara ett resultat av elevens vilja att framstå som normal. Elever tvingas ibland göra ett val mellan att visa sina förmågor, och då möjligen framstå som udda, eller hålla tillbaka sitt intresse och sin fallenhet och därigenom framstå som normal.

Personlighetsdrag tycks slå igenom i hur eleverna uttrycker sina förmågor: där några är kortfattade och löser allt muntligt medan andra både skriver sina förklaringar och berättar om sina tankegångar på ett informativt sätt. Liknande

förhållande mellan personlighetsdrag och sätt att uttrycka sina matematiska förmågor finns genomgående hos fallstudieeleverna. Flertalet av eleverna klarar svåra beräkningar men de gör det på olika sätt: vissa använder algoritmer och traditionella metoder medan andra använder egna metoder och oftast utför beräkningarna i huvudet.

Resultaten av fallstudierna visar att samtliga elever uttrycker ett flertal av de matematiska förmågor så som de definierats i studien (Krutetskii, 1976). Utmärkande är elevernas förmåga att *formalisera* ett matematiskt material vilket innebär att de ser och tolkar den formella strukturen i en problemformulering och att de har förmåga att fånga helheten utan att bortse från delarna. Andra förmågor som är framträdande i studien, men som skiftar i omfattning och uttryckssätt mellan olika elever, är förmåga att operera med siffror och symboler, flexibilitet i tänkandet och förmåga att generalisera. Några av eleverna, framförallt de yngre, fascinerar och förvånar mig vid varje tillfälle vi träffas. Det kan vara genom deras beteende både avseende personliga egenskaper som energi, nyfikenhet men också genom deras logiska resonemang, förmåga att dra slutsatser, se mönster och finna egna lösningsstrategier. De utvecklas också under studiens gång, en utveckling som har sin grund i att de fått positiv uppmärksamhet för sin fallenhet, fått stimulans i form av utmanande problem och frågeställningar där svaren inte är självklara för dem och där de fått möjlighet att uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor. Andra drag som varit framträdande i den aktuella studien är bland annat elevernas minnesförmåga, i första hand deras förmåga att minnas strukturer och strategier vid problemlösning men också ren faktakunskap, ibland även av nonsenskaraktär.

Sociala och sociomatematiska normer och deras betydelse för utveckling av matematiska förmågor

Studien pekar på vikten av de klassrumsnormer som påverkar samspelet mellan lärare och elev(er), sociala normer såväl som sociomatematiska, d.v.s. normer specifika för ämnet matematik. Både aktivitetens art och lärarens agerande påverkar etablerandet av sociala och sociomatematiska normer i klassrummet. Lärarens respons på elevernas svar och förklaringar och lärarens frågor till eleverna är viktiga för hur eleven tolkar sin kunskap och sina förmågor. I interaktionen skapas, modifieras och etableras sociomatematiska normer som sedan utgör grund för klassrummets matematiska praktik. I de klassrumsobservationer som genomförts i studien och som innehållit någon form av undersökande aktivitet har de sociala normerna i stor utsträckning präglat undervisningen: att eleverna bör räkna upp handen och svara när de får frågan, att läraren är den som fördelar ordet någorlunda jämnt bland deltagarna och att alla elever bör förstå det innehåll som presenteras. Lärares korta positiva respons

på rätt svar präglar en klassrumspraktik som avsevärt skiljer sig från en praktik där normen är att eleverna bör få diskutera och argumentera för olika lösningar till ett problem.

Vid ett fåtal tillfällen har interaktionen handlat om de matematiska lösningarnas karaktär som annorlunda, effektiva eller acceptabla. Normer som skapas och etableras i klassrummet, styr elevernas attityder till ämnet och deras egen normbildning. Ibland kan emellertid konflikter uppstå mellan olika normsystem – sociala normer och sociomatematiska. Om en elevs förklaring av ett matematiskt problem inte kan förstås av övriga elever eller om lösning inte är acceptabel då det matematiska innehållet inte ingår i årskursens stoff, kan det uppstå konflikt mellan en social norm, som säger att alla elever ska förstå det som sägs i ett klassrum om de rimligen, enligt förväntningarna som kan ställas på åldersgruppen, har möjlighet att förstå det som sägs, och en sociomatematisk norm som betonar värdet av variation i lösningsförslag och diskussion av alternativa, effektiva och sofistikerade lösningar. Förklaringen till att sådana normkonflikter uppstår kan vara att läraren har bristande matematisk kompetens, d.v.s. läraren har svårt att tolka och redogöra för lösningen så att övriga elever förstår, eller att läraren har svårt att frångå en etablerad social norm, t.ex. den att lärarens uppgift är att skydda elever från att framstå som udda, i jämförelse med andra elever i åldersgruppen. Normen, att individer förväntas passa in i mängden, är en norm som har visat sig missgynna begåvade elever.

Elevernas möjligheter till extra stöd

Resultaten av fallstudierna visar att skolorna i hälften av fallen ger någon form av extra stöd till eleverna. Stödet varierar både vad gäller utformning och omfattning och förändras också under studiens gång. I jämförelse med ett flertal andra länder, där statligt stöd till identifierade elever är obligatoriskt, finns inga sådana självklara rättigheter, för svenska elever eller föräldrar till begåvade elever, att kräva stöd. Som framgår av enkätstudien som ställdes till matematikutvecklare finns inga dokumenterade svenska handlingsplaner som anger hur skolan bör bemöta elever med särskilda matematiska förmågor. Resultatet av enkätstudien visar att det stöd som erbjuds elever med intresse och fallenhet för matematik till största delen är utformat som accelerationsaktiviteter, främst till elever i senare delen av grundskolan. Då lärare, vilket framgår av enkätstudien riktad till lärare i grundskolan, i stor utsträckning ser elevers snabbhet och deras förmåga till självständigt arbete som tecken på matematisk förmåga är detta resultat inte förvånande.

/ Eva Pettersson

Lärares aktiva arbete för en förändrad matematikundervisning

Ylva Jannok Nutti

Ylva Jannok Nutti disputerade 2011-01-21 vid Institutionen för Konst, Kommunikation och Lärande, Luleå tekniska universitet.

I avhandlingen, *Ripsteg mot samisk spetskunskap i matematik - Lärares perspektiv på transformeringsaktiviteter i samisk förskola och sameskola* (Jannok Nutti, 2010), studeras lärares perspektiv på skoltransformering och deras genomförande av skolaktiviteter i matematik. Utgångspunkt för avhandlingen var licentiatavhandlingen (Jannok Nutti, 2007) och tidigare forskning i Alaska av Lipka med flera (1988). I licentiatavhandlingen beskrevs samisk traditionell kunskap utifrån de grundläggande matematiska aktiviteter som beskrivs av Bishop (1988; 1991). Lipkas tidigare forskning visade på att samarbete mellan äldre kulturbärare, lärare, matematiker och forskare kan resultera i kulturellt baserade matematiklektioner där.

Studien genomfördes inom ett aktionsforskningsprojekt i sameskolan. Avhandlingsstudiens resultat grundar sig på samtal med lärare vid sameskolan. Sameskolan är en skolform som är likvärdig med grundskolan, men den är utformad och profilerad för att tillvarata och utveckla det samiska språket och kulturarvet, och omfattas av årskurserna 1-6, samt även av förskoleklass, förskole- och fritidshemsverksamhet. Avhandlingsstudiens resultat presenteras i tre delar. Den första delen bygger på samtal med olika lärargrupper, där lärarna både kritiskt granskade den egna utbildningen i matematik och uttryckte de utmaningar lärarna upplevde avseende realiserandet av en matematikundervisning utifrån ett samiskt perspektiv. Därefter genomfördes transformeringsaktiviteter i matematik. Dessa genomfördes i sameskolan, vid samiska fritidshemmet, samt även inom den samiska förskolan. Dessa aktiviteter låg sedan till grund för studiens andra del, där reflektionssamtal fördes med lärarna utifrån de genomförda transformeringsaktiviteterna. I studiens tredje del presenteras avslutande samtal om lärares upplevda utmaningar om skoltransformering av utbildning i matematik.

Aktiviteterna som genomfördes kan tolkas utifrån i tre olika nivåer med hjälp av Banks (2004) multikulturella modell. Vid aktiviteterna på den första nivån arbetade man med teman med samiskt kulturellt innehåll. Här ägnades liten uppmärksamhet åt den matematiska innebörden, fokus låg istället på genom-

förändret av temat. Aktiviteterna genomfördes så att de gav viss insikt om till exempel samiska måttenheter och mätmetoder eller sätt att räkna renar, men de berörde endast matematiken översiktligt. Aktiviteter på den andra nivån var aktiviteter där skolmatematiken gavs ett samiskt kulturellt innehåll. Aktiviteterna bestod av räkneexempel med kulturella teman såsom matlagning, bakning, renskiljning och så vidare. Dessa aktiviteter består av innehåll, begrepp och teman som läggs till utbildningen. Detta skedde dock utan att matematik-utbildningens struktur förändrades och räkneexemplen var utformade så att de liknade exempel i en lärobok. Den tredje och sista typen av aktiviteter var sådana där man utgick från den samiska kulturen och försökte föra in denna i matematikundervisningen. Här genomfördes aktiviteterna inte som traditionellt i kulturen och strukturen i matematikundervisningen hade förändrats. Detta gjordes för att ge eleverna möjlighet att använda sin kulturella kompetens och begrepp som inte var utpräglat "skolmatematiska" kom då till användning. Exempel på detta är när kroppsmått kombinerades med metersystemet för att mäta snödjup.

Genomförandet av aktiviteter innebär att lärarna omformulerade utbildningen i matematik utifrån den samiska kulturen, vilket i samtliga fall innebar svårigheter genom att kunskaper togs från sin ursprungliga kontext och återskapades i ett skolsammanhang, vilken är en ny kontext. I detta arbete synliggjordes distansen mellan utbildning i matematik i skolan och de samiska traditionella kunskaperna i deras ursprungliga kulturella kontext. Nivå ett kan innebära temaarbeten där den samiska kulturen ges utrymme i skolsituationen utan att skolan påverkar dess innehåll. Här finns det matematiska med enbart som ett inslag i ett temaarbete utan att detta särskilt analyseras eller problematiseras. Här består matematiken kanske av räkning av renar eller användning av kroppsmått och sättet att använda den är starkt kopplat till den praktiska användningen i den ursprungliga kontexten. Det kan tolkas som temabesök i kulturen, där räkningen eller mätningen finns närvarande som en del av sammanhanget. Nivå två, som innebär en utbildning i matematik bestående av räkneuppgifter med samiska kulturella element, kan ge eleverna en känsla av igenkännande. Utifrån Gellert och Jablonka (2009) bör uppgifterna vara utformade, så att intentionen med uppgiften inte misstolkas av eleverna genom att de övertolkar det kulturella innehållet. För transformeringsaktiviteter på den tredje nivån var matematik en central del av arbetet. Samiska begrepp och teman försöktes förmedlas utifrån både ett samiskt kulturellt och ett skolmatematiskt perspektiv och en interaktion mellan den samiska matematiken och matematiken i skolan eftersträvades. Det krävs en medveten hållning och ett reflexivt förhållningssätt avseende målet med transformationsaktiviteterna. När kunskap transformeras från en kontext till en annan, måste en ödmjuk hållning inför både den traditionella kunskapen och

det akademiska lärandet innebära en kontinuerlig reflektion avseende målen för transformeringen.

Före genomförandet av aktiviteter diskuterade lärarna de faktorer som de upplevde hindrade dem att arbeta utifrån ett samiskt perspektiv. Faktorerna som framkom var framför allt avsaknad av adekvata läromedel, nationella prov och styrdokument, bristen på tid och resurser, negativt inställda föräldrar, samt bristande kunskap om samiskt perspektiv. Dessa faktorer betraktades av lärarna framför allt såsom externa hinder, där den egna möjligheten att påverka dessa hinder upplevdes som mycket begränsad. Lärarna upplevde trots det att de då och då arbetade med vardagsexempel i matematiken. Dessa genomfördes i relation till läroboken. Detta överensstämmer med Skolverket (2002), som påtalade lärobokens styrande roll för matematikundervisningen. Att då avsaknaden av adekvata samiska läromedel verkade begränsande för lärarnas möjligheter att arbeta utifrån ett samiskt perspektiv, kanske inte är förvånande. Efter genomförandet av aktiviteter framkommer i lärarnas berättelser samma utmaningar som tidigare, men förhållningssättet till dessa hade förändrats. De tidigare påtalade externa hindren betraktades efteråt i högre grad såsom interna hinder, vilket innebar att läraren påbörjade betrakta de tidigare opåverkbara hindren såsom påverkbara eller möjliga att undkomma. Viktigt här är att se att det konkreta arbetet med förändringsaktiviteter i sig påvisade möjligheten, men även att arbetet gav lärarna en chans att tolka och realisera en samisk matematikundervisning. Detta innebär inte att ansvaret på att arbetet genomförs enbart ligger på enskilda lärare utan att lärarna måste ges möjlighet till att klara av att realisera förändringsarbetet. Ett förändringsarbete startar utifrån en enskild lärares eller enskilda lärares förändringsarbete, men om inte läraren kan ha stöd från kollegor och ledning är det mycket lätt att förändringsarbetet avstannar. För att lärare i sameskolan ska få möjligheter att kritiskt kunna granska sin verksamhet samt tydliggöra visioner och mål behövs kompetensutveckling och handledning. Detta ökar lärarnas möjligheter att föra in det samiska perspektivet i matematikutbildningen.

Förutom läroboken sågs tidsbrist som det största hindret för förändringsarbetet. Upplevelsen av tidsbrist utgjorde efter läroboken den centrala begränsande faktorn för genomförandet av förändringsarbete, medan däremot efter genomförandet av transformeringsaktiviteterna den enskilde läraren sågs som det främsta hindret. Det krävs aktivt engagemang av lärare för att arbeta för förändring. Viktigt här blir då den enskilde läraren och dennes kunnande i matematik, matematikdidaktik, samt samisk kultur och språk, samt kunskapen att omformulera detta till lämpligt arbetsområde i skolan. I studien visade det sig att dessa kunskaper blev avgörande för utformningen och utfallet av aktiviteterna. Begränsande för det aktiva engagemanget verkar vara nationella

prov och nationella mål, då valet att inte förändra kan förklaras i lärarnas önskan att eleverna ska prestera 'bra' på proven och nå målen i kursplanerna. Det är därför av yttersta vikt att diskutera om specifika styrdokument för samisk utbildning i matematik behöver formuleras.

Referenser

- Banks, James A. (2004). Multicultural Education: Historical Development, Dimensions, and Practice. I: J. A. Banks (ed.). *Handbook of Research on Multicultural Education* (2:nd edition). San Francisco: Jossey-Bass A Wiley Imprint.
- Bishop, Alan J. (1988). Mathematics Education in Its Cultural Context. I: *Educational studies in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands.
- Bishop, Alan J. (1991). *Mathematics Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Gellert, Uwe and Jablonka, Eva (2009). "I am not talking about reality" World problems and the intricacies of producing legitimate text. I: L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooreen och S. Mukhopadhyay (red.) *Worlds and words: modelling verbal descriptions of situations*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Jannok Nutti, Ylva (2007). *Matematiskt tankesätt inom den samiska kulturen – Utifrån samiska slöjdares och renskötarens berättelser* (Licentiatuppsats). Luleå: Pedagogik och lärande, Luleå tekniska universitet.
- Jannok Nutti, Ylva (2010). *Ripsteg mot samisk spetskunskap i matematik- Lärares perspektiv på transformeringsaktiviteter i samisk förskola och sameskola*. Luleå tekniska universitet, Institutionen för pedagogik och lärande.
- Lipka, Jerry, Mohatt, Gerald V. and the Ciulistet Group (1998). *Transforming the Culture of Schools. Yupik Eskimo Examples*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Skolverket (2003). *Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2001. Lusten att lära med fokus på matematik*. Skolverkets rapport nr 221.

/ *Ylva Jannok Nutti*

Ansvar för matematiklärande Effekter av undervisningsansvar i det flerspråkiga klassrummet

Åse Hansson

Åse Hansson disputerade 2011-10-28 vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet.

Undervisningsgrupperna i matematik skiljer sig åt i många avseenden i den svenska grundskolan. Skolsegregation och olika differentieringsåtgärder har tillsammans med en ökad andel elever med annat modersmål än svenska lett till att grupperna har olika behov av stöd för att eleverna skall kunna nå målen i matematik. Matematikundervisningen står därför inför stora utmaningar att hantera komplexa situationer. Min avhandling syftar till att bidra med kunskap om den roll undervisningen spelar för elevers matematiklärande. Studien har särskilt uppmärksammat sådana utgångspunkter för undervisningen som är relaterade till undervisningsgruppernas sammansättning. Elevernas familjebakgrund och språkkunskaper har då beaktats. Vidare syftar studien också till att belysa matematikundervisningens likvärdighet relativt gruppens sammansättning. Studien är genomförd som en sekundäranalys av TIMSS-data (Trends in International Mathematics and Science Study) med fokus på svensk matematikundervisning i årskurs 8. Undersökningen har genomförts som flernivå strukturell ekvationsmodellering. Utifrån teorier om lärande och undervisning har sådana aspekter av matematikundervisningen som är avgörande för elevernas möjligheter att utveckla sina matematikkunskaper identifierats. I det sammanhanget har även hänsyn tagits till elevers möjligheter att parallellt utveckla språk- och matematikkunskaper. Det har sedan undersökts hur dessa olika dimensioner av matematikundervisningen är relaterade till undervisningsgruppernas prestationer. Om det finns något samband mellan gruppernas sammansättning och matematikundervisningens utformning och genomförande har också varit föremål för analys.

Inledningsvis undersöktes dimensionaliteten av undervisning som verkar stödjande för elevers kunskapsbildning i matematik och en teoretisk modell för att synliggöra dessa dimensioner utvecklades (Hansson, 2010). Med hjälp av modellen var det sedan möjligt att beskriva matematikundervisning och undersöka effekter av att lärare, respektive elever, tar olika hög grad av ansvar för dessa undervisningsdimensioner. Modellutvecklingen genomfördes som en flernivå konfirmatorisk faktoranalys (M-CFA; Multilevel Confirmatory Factor

Analysis). Till skillnad från traditionella modeller av matematikundervisning, vilka exempelvis skiljer mellan lärar- och elevcentrerad undervisning, kan den framtagna modellen simultant belysa olika undervisningsdimensioner. Teoretiska utgångspunkter har varit att samtal och interaktion, lärarens aktiva stöttning av eleven samt elevens egen aktivitet och konstruktion av kunskap är avgörande förutsättningar för kunskapsutvecklingen (se, ex., Brousseau, 1997; Cummins, 1984; Vygotskij, 1926/1997, 1978, 1986, 1997). Undervisningsmodellens första dimension beskriver lärarens ansvar för att aktivt stödja eleverna i deras matematiklärande genom att till exempel lyfta fram och förklara matematikinnehållet, diskutera och samtala med eleverna och organisera undervisningen i syfte att skapa förutsättningar för interaktion och olika sociala aktiviteter. Den andra dimensionen beskriver lärarens ansvar för att lämna över ansvar till eleverna själva för deras egen konstruktion av kunskap, genom att exempelvis uppmuntra dem till egna reflektioner och resonemang om matematiska problem. Slutligen rör den tredje dimensionen lärarens ansvar för att lyfta fram ett innehåll i undervisningen som är relevant för den årskurs undervisningen avser.

I en annan av avhandlingens delstudier genomfördes en flernivå strukturell ekvationsmodellering (M-SEM; Multilevel Structural Equation Modelling) för att undersöka relationen mellan matematikprestationer i flerspråkiga klassrum och undervisningsansvaret för elevernas lärande (Hansson, 2011). Den strukturella modellen utgick från antagandet att elevernas matematikprestationer påverkas av det sätt lärare tar ansvar för att erbjuda undervisningsmiljöer karakteriserade av undervisningsmodellens tre dimensioner. Ett annat antagande var att klassens sammansättning med avseende på elevernas språkkompetenser och socioekonomiska status påverkar både prestationsnivåer och hur undervisningsansvaret kommer till uttryck i matematikundervisningen (se, ex., Cummins, 1984; Dumay & Dupriez, 2007; Gibbons, 2006; Skolverket, 2008). För att urskilja undervisningsansvarets specifika påverkan på prestationsnivåerna kontrollerades därför effekterna för olika grupsammansättningar. För att undersöka om elever i behov av språklig stöttning i sitt matematiklärande är mer beroende än andra av en lärmiljö som erbjuder aktivt lärarstöd, elevaktiviteter och möjligheter till samtal och interaktion, analyserades om undervisningsansvaret hade ett tydligare samband med språkligt relaterade testuppgifter än med andra. Resultaten visade att ju mer eleverna själva fick ta ansvar för sitt lärande desto lägre prestationsresultat uppvisades. Det fanns en tydlig positiv effekt av att lärare tog ansvar för elevernas matematiklärande genom undervisning och stöttning samtidigt som eleverna fick möjlighet att själva konstruera sin kunskap. Resultaten indikerade också att dessa dimensioner av undervisningen var av särskilt stor betydelse för elever med svagt utvecklade

kunskaper i undervisningsspråket. Emellertid visade också resultaten att svensk matematikundervisning präglas av pedagogisk segregation. I grupper där många elever kunde förväntas ha behov av stöd, antingen av sociala eller språkliga skäl, tog läraren ett mindre ansvar för elevernas lärande än vad som gjordes i andra grupper.

En av de kontrollvariabler som användes i studien var elevernas socioekonomiska status, SES. Då mycket tyder på att denna variabel är komplicerad att mäta i undervisningsgrupper med stor andel elever med migrationsbakgrund (Elmeroth, 2006), gjordes en särskild undersökning av SES-måttets invarians mellan olika grupper av elever (Hansson & Gustafsson, 2011). Som metod för denna analys användes flergrupps konfirmatorisk faktoranalys (Multiple Group CFA). Undersökningen resulterade i en mätmodell för SES vilken användes i den ovan återgivna studien där effekter av undervisningsansvar och undervisningens likvärdighet undersöktes. Delstudiens huvudsyfte var att utforma en mätmodell för SES som tar hänsyn till att de indikatorer som traditionellt används för att mäta denna faktor både kan ha olika betydelse och vara på mycket olika nivåer beroende på elevgruppernas migrationsbakgrunder. Olika effekter av att mäta SES på traditionellt sätt analyserades och därefter modifierades mätmodellen för att bättre svara upp mot de gruppskillnader som påträffades. Slutligen jämfördes både modellenpassning och prediktionsförmåga mellan den ursprungliga och den modifierade modellen. Det antogs att SES kunde återges av en latent faktor som definierades genom familjens kulturella kapital (Bourdieu, 1984; Coleman, 1988; Yang & Gustafsson, 2004). Faktorn indikerades av fyra manifesta variabler från elevenkäten; hur många böcker det finns i elevens hem, mammans respektive pappans utbildningsnivå samt elevernas studieambitioner. Undersökningen visade att det fanns metrisk invarians i SES mellan olika elevgrupper, varför det gick att hävda att den latent variabeln hade samma innebörd för alla grupper, oberoende av om det var elever med utländsk bakgrund födda utomlands eller i Sverige, eller om det var elever med svensk bakgrund. Däremot fanns inte skalär invarians, ty intercepten för indikatorerna antal böcker i hemmet och moderns utbildningsnivå var avsevärt högre i gruppen med svensk bakgrund jämfört med grupperna med utländsk bakgrund. Att modifiera modellen genererade emellertid dramatiskt avvikande estimat för det latent medelvärdet jämfört med att inte göra detta. Slutsatsen av studien blev därför att det behövs mer forskning för att bestämma vilken ansats som är optimal att använda för att mäta SES i grupper med elever med olika migrationsbakgrund. En rekommendation som lämnades var dock att undvika modeller med partiell skalär invarians då man undersöker skillnader i latent medelvärden, vilket innebär att man inte modifierar mätmodellen för interceptskillnader på vissa variabler.

Under den period som matematikprestationerna försämrats i Sverige har arbetsformer där eleverna förväntas ta ett stort ansvar för sitt eget lärande varit vanliga. I de studier som gjorts inom ramen för denna avhandling uppvisas ett negativt samband mellan elevansvar för stora delar av lärprocessen och matematikprestationerna. Resultaten visar också att undervisningsgruppernas sammansättning förutom att vara relaterade till prestationsnivåer även är relaterade till hur ansvaret för elevernas lärande gestaltas i matematikundervisningen. Undervisningsgrupper med stor andel elever med låg socioekonomisk status eller med förväntat svaga språkkompetenser har förutom lägre prestationsresultat även mer sällan än andra grupper sådan matematikundervisning som utmärks av att läraren tar ett stort undervisningsansvar. Detta trots indikationer på att dessa elever är i särskilt stort behov av lärarstöd för sin kunskapsutveckling. Elevers förutsättningar i den svenska grundskolan att klara sina matematikstudier kan därför inte betraktas vara likvärdiga. I avhandlingen diskuteras om det ansvar som under en längre tid lagts på eleverna själva för deras matematiklärande parallellt med pedagogisk segregation kan ha bidragit till den negativa kunskapsutvecklingen i matematik som Sverige uppvisat under senare decennier.

Referenser

- Bourdieu, P. (1984). *Distinction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990/ by Brousseau; edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield*. Dordrecht; London: KLUWER Academic Publishers.
- Coleman, J. S. (1988). Social capital in the creation of human capital. In C. Calhoun, J. Gerteis, J. Moody, S. Pfaff & I. Virk (Eds.), *Contemporary sociology theory* (pp. 110-116). Malden MA: Blackwell Publishing.
- Cummins, J. (1984). *Bilingualism and special education: Issues in assessment and pedagogy*. San Diego, CA: College Hill Press.
- Dumay, X., & Dupriez, V. (2007). Accounting for class effect using the TIMSS 2003 eighth-grade database: Net effect of group composition, net effect of class process, and joint effect. *School Effectiveness and School Improvement*, 18(4), 383-408.
- Elmeroth, E. (2006). Monokulturella studier av multikulturella elever. Att mäta och förklara skolresultat. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 11(3), 177-194.
- Gibbons, P. (2006). *Stärk språket stärk lärandet: Språk och kunskapsutvecklande arbetssätt för och med andraspråkselever i klassrummet*. Uppsala: Hallgren & Fallgren.

- Hansson, Å. (2010). Instructional responsibility in mathematics education: Modelling classroom teaching using Swedish data. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 171-189.
- Hansson, Å. (2011). The meaning of mathematics instruction in multilingual classrooms: Analysing the importance of responsibility for learning. *Accepted for publication in Educational Studies in Mathematics*.
- Hansson, Å., & Gustafsson, J. E. (2011). Measurement invariance of socioeconomic status across migrational background. *Accepted for publication in Scandinavian Journal of Educational Research*.
- Skolverket. (2008). Betyg och provresultat i grundskolan läsåret 2007/2008.
- Vygotskij, L. (1926/1997). *The collected works of L.S. Vygotsky. Vol. 3: Problems of the theory and history of psychology*. Ed. by Rieber, R W and Wollock, J. New York and London: Plenum Press.
- Vygotskij, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Vygotskij, L. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: Harvard Univeristy Press.
- Vygotskij, L. (1997). *Educational Psychology*. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC.
- Yang, Y., & Gustafsson, J. (2004). Measuring socioeconomic status at individual and collective levels. *Educational Research and Evaluation*, 10(3), 259-288.

/ Åse Hansson

Begreppsbildning i matematik

Jörgen Sjögren

Jörgen Sjögren disputerade 2011-06-08 med avhandlingen *Concept Formation in Mathematics*, Acta Philosophica Gothoburgensia 27, Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg 2011.

Inledning

Avhandlingen handlar huvudsakligen om begreppsbildning i matematik; hur begrepp finner sin väg in i matematik. Den handlar inte om hur individer tillägnar sig etablerade begrepp, eller om hur tradering av etablerade begrepp kan tänkas gå till. Avhandlingen består av en inledning och tre, delvis överlappande, delar där jag i den första konstruerar ett sannolikhetsliknande mått på kraften hos en aritmetisk teori. Med ”kraft” avses förmågan att bevisa teorem. I den andra delen utvecklas en teori om hur begrepp bildas i matematik. Utgångspunkten här är Aristoteles’ uppfattning om matematiska begrepp som abstraktioner. Denna process av alltmer förfinade abstraktioner beskrivs med hjälp av begreppet *explikaton*; ett begrepp som utvecklats och använts av Rudolf Carnap. Slutligen används denna begreppsapparat för att diskutera några matematikfilosofiska frågeställningar.

Begreppsbildning i matematik

Aristoteles menar att matematiska begrepp är abstraktioner. Vi kan i tanken abstrahera de former som är inneboende i tingen (substanserna). De matematiska objekten har inte, som hos Platon, en självständig existens. I denna abstraktionsprocess kan vi välja ur vilken eller vilka aspekter vi vill betrakta ett objekt. Denna aristoteliska uppfattning är en variant av metafysisk realism vad gäller existensen av matematiska objekt. Man kan emellertid beskriva denna abstraktionsprocess på ett metafysiskt neutralt sätt som en svit av explikationer. Begreppet *explikation* utvecklades av Carnap under mitten av förra seklet. Idén är att man i vetenskapliga eller matematiska sammanhang ofta har vaga begrepp som behöver ersättas med mer precisa begrepp inom en teori. De krav Carnap formulerar för det preciserade begreppet är att det ska vara användbart i de flesta sammanhang där det tidigare, vaga begreppet kunnat användas. Det ska dessutom vara inlemmat i en klarare begreppslig eller formell struktur, det ska vara fruktbart, och slutligen så enkelt som möjligt samtidigt som övriga villkor är uppfyllda.

I avhandlingen exemplifierar jag med åtskilliga begrepp från både matematik och naturvetenskap, som begreppen *funktion*, *naturligt tal*, *mängd*, *beräkningsbarhet*, *gravitation*, *hastighet*, *art* och så vidare. En observation man kan göra är att välutvecklade matematiska begrepp verkar kunna explikerars på ett och endast ett sätt, de är robusta, medan begrepp inom naturvetenskap ej verkar vara bestämda på detta sätt. De är teoriberoende på ett helt annat sätt än vad matematiska begrepp är. Så verkar exempelvis begreppet *beräkningsbar funktion* bara kunna explikerars på ett sätt, nämligen via begreppet *turingberäkningsbar*. Andra explikationer som föreslagits är ekvivalenta i den meningen att de genererar precis samma funktionsmängd. Jämför vi med begreppet *gravitation*, så har innebörden i detta begrepp radikalt ändrats vid övergången från klassisk, newtonsk mekanik till allmän relativitetsteori. Denna iakttagelse generaliseras i avhandlingens sista bidrag, skrivet tillsammans med Christian Bennet, till en karakterisering av matematik som vetenskapen om unikt explikerbara begrepp, eller att ett begrepp är matematiskt om det är unikt explikerbart.

Ovanstående idé om begreppsbildning växte fram i samband med slutförandet av den licentiatuppsats, som utgör första delen av avhandlingen. Den frågeställning som aktualiserades var det klassiska problemet om logikens, och i vidare mening av matematikens, tillämpbarhet. Licentiatuppsatsen behandlar möjligheten att tilldela elementära aritmetiska teorier mätetal som skulle svara mot hur starka teorierna i fråga är.

Att mäta kraften hos en aritmetisk teori

Gregory Chaitin har hävdats att man skulle kunna mäta kraften hos en aritmetisk teori med hjälp av begrepp han själv har studerat och utvecklat. Den teknik han främst förespråkats går ut på att använda en konstant i hans ofullständighetssats, som säger att för varje aritmetisk teori T , så finns en konstant c_T sådan att teorin inte kan bevisa någon sats på formen $K(n) > c_T$ trots att oändligt många dylika satser är sanna. Med $K(n)$ avses kolmogorovkomplexiteten för strängen n , d.v.s. längden av det kortaste program som kan generera strängen med hjälp av en turingmaskin (eller en abstrakt dator). Att detta inte är en framkomlig väg visades tidigt av Michiel van Lambalgen och senare av Panu Raatikainen. I det av mig konstruerade måttet utgår jag från att "kraft" betyder förmåga att bevisa teorem, d.v.s. att en teori T är mer kraftfull än en teori S , om T bevisar fler teorem än vad S gör. Det är då möjligt att isolera en typ av satser i elementär aritmetik och tilldela dem en sorts sannolikhetsliknande mått. Utgående från dessa 'elementarsannolikheter' kan man sedan beräkna mått på vissa andra aritmetiska satser. Slutligen kan detta mått användas för att definiera ett mått på kraften hos aritmetiska teorier (licentiatuppsats, artikel 1).

Chaitin formulerade också ett antal andra förslag på hur man skulle kunna konstruera mått för att mäta kraften hos aritmetiska teorier. Dessa mått diskuteras och i avhandlingen visas att inte något av dessa förslag är användbara. Slutsatsen är att inget mått, utom möjligen det av mig konstruerade, uppfyller rimliga krav på ett dylikt mått, och att det därmed förmodligen inte är möjligt att konstruera en tillfredsställande explikation av detta begrepp; att begreppet inte är möjligt att matematisera (artikel 2).

Några tillämpningar

Väsentliga delar av avhandlingen presenterar, diskuterar och exemplifierar den ovan beskrivna idén om begreppsutveckling i matematik. Den används också för att analysera några matematikfilosofiska frågeställningar

Hur relationen mellan *informella bevis* (bevis som de används i matematik) och *formella bevis* (bevis som de presenteras i logik) ska förstås är ett sedan länge diskuterat matematikfilosofiskt problem. I en av uppsatserna i avhandlingen föreslås att *bevis i klassisk första ordningens predikatlogik* är en fruktbar explikation av begreppet *informellt bevis* (artikel 3).

Dessutom analyseras det argument som normalt uppfattas som det starkaste för matematisk realism utifrån den i avhandlingen presenterade idén om begreppsbyggnad. Argumentet utgår från att matematik är nödvändig för våra bästa vetenskapliga teorier om verkligheten. Det grundar sig på inslag i Quines filosofi som holism, naturalism samt hans kriterium för existens av objekt. *Holism* identifieras som den svagaste delen i argumentet, som utnyttjar en felaktig föreställning om i vilket avseende en matematisk teori testas tillsammans med en vetenskaplig teori. Matematiska begrepp involverar en empirisk (syntetisk) komponent och en logisk (analytisk). Den empiriska komponenten avspeglar att begreppet har sitt ursprung i en empirisk verklighet, medan den analytiska har att göra med att begreppet skall på ett konsistent sätt passa in i ett deduktivt system. I en testsituation är det enbart den empiriska komponenten, d.v.s. hur begreppet hänger ihop med en empirisk verklighet, som testas. Matematiska satsar är på detta sätt betraktas som både syntetiska och analytiska. Argument för en matematisk realism är i och med detta en variant av nödvändighetsargumentet, men det utnyttjar en svagare variant av holism.

Vad gäller matematikens tillämpbarhet, så är detta en konsekvens av att matematiska begrepp har en empirisk, eller syntetisk, komponent (artikel 4).

Framtida projekt

Under färdigställande är en uppsats som diskuterar (stark) social konstruktivism, och kritik mot denna uppfattning framförs med grund ibland annat den i avhandlingen presenterade idén om begreppsbildning i matematik. Ett kommande projekt är att diskutera relevansen av begreppen i avhandlingen för matematikundervisning, och då avser jag både tradering och tillägnandet av etablerade matematiska begrepp.

Avhandlingen är tillgänglig via

<http://hdl.handle.net/2077/25299>

och distribueras av

ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS

Box 222

SE-405 30 Göteborg

acta@ub.gu.se

E-post: jorgen.sjogren@his.se

/ Jörgen Sjögren

Att förstå genom att se ett mönster

Paulina Lindström

Paulina Lindström disputerade 2011-06-01 vid filosofiska institutionen, Lunds universitet.

Introduktion

I avhandlingen *Understanding as experiencing a pattern* har jag undersökt vad som händer när vi förstår, specifikt när vi förstår en matematikuppgift. Avhandlingens tes är att förståelse handlar om att se ett mönster, i betydelsen att man kan "se" strukturen i en uppgift, en princip eller ett problem. Att se ett mönster innebär också att man uppmärksammar relevant information och att man kan använda sig av mönster för att lösa problem.

I ett av avhandlingens projekt fick högskolestudenter lösa olika typer av matematiska problem. En uppgift bestod av endera en text, en graf eller en ekvation. Uppgiften gick ut på att finna motsvarande text, graf eller ekvation bland 4 alternativ. Uppgiften och alternativen var representerade i olika former, till exempel en graf med textalternativ, en text med formelalternativ eller en formel med textalternativ. I det andra projektet fick 8-10 åringar spela ett matematikspel för att lära sig grundläggande aritmetik.

Genom att bland annat använda ögonrörelsemätning kunde vi dra slutsatser om vad studenter uppmärksammar i en uppgift. Ögonrörelsemätning innebär att man genom att filma ögats rörelser kan se vad en person tittar på. Man kan till exempel se om studenter hoppar mycket mellan informationen eller om de tittar på en viss del av en graf eller på en viss del av en ekvation i en uppgift. Resultaten från studierna visar att uppmärksamhet på områden som är relevanta för ett problem ofta innebär att man har förstått uppgiften och att man lättare klarar av att lösa den.

Förståelse genom att se ett mönster

Förståelse är ett komplext begrepp. Vi använder det dock dagligdags, ofta utan att exakt ha klart för oss vad vi menar. Förståelse är begrepp som saknar en motsvarande strikt vetenskaplig definition. I vissa situationer räcker det med implicit kunskap för att uppvisa förståelse, i andra sammanhang krävs det att man explicit kan redogöra för relevant kunskap för att motivera sin förståelse av ett fenomen. I min avhandlingen har jag strävat efter att fånga aspekter av detta vardagsbegrepp.

Avhandlingen börjar med en bakgrundsdel som presenterar tesen att förståelse handlar om att uppleva/se ett mönster. Med andra ord innebär det att man kan "se" strukturen i en uppgift, en princip eller ett problem. Vidare innebär det att man uppmärksammar relevant information och att man har förmåga att använda sig av mönstret. I avhandlingen jämförs detta perspektiv med ett antal andra perspektiv på förståelse, som:

- förståelse som att se en gestalt,
- förståelse genom att göra,
- förståelse genom att uppvisa ett flexibelt beteende,
- förståelse som att ha en representation och
- förståelse som förmåga till transfer

Avhandlingens övergripande fokus är att: (1) utforska processen som leder fram till förståelse liksom gränsen mellan förståelse och icke-förståelse, och mer specifikt, (2) att undersöka *visuell* uppmärksamhet till olika delar av ett stimulus.

I termer av avgränsning har det handlat om att jag har studerat situationer där man kan definiera en början och ett slut. Dessa situationer erbjuder möjligheten att studera förståelseprocesser inom en relativ begränsad tidsperiod. Detta till skillnad från förståelse som utvecklas över längre, och inte lika väl avgränsade, tidsrymder, som till exempel expertis inom olika ämnesområden.

Målet med min forskning har varit att:

- (1) utforska delar av processen som ligger till grund för förståelse genom att undersöka huruvida visuell uppmärksamhet till så kallade kritiska områden är korrelerade till förståelse,
- (2) använda ögonrörelsemätning i kombination med andra metoder för att undersöka kognitiva processer och
- (3) utvärdera pedagogiska implikationer av genomförda studier.

Studierna i avhandlingen härstammar från två olika projekt. Det ena genomfördes i en kontrollerad laboratoriemiljö. Det andra genomfördes i klassrum i en skolmiljö. I båda projekten utforskades och testades perspektivet "förståelse genom att uppleva/se ett mönster". Båda projekten undersökte hur studenter uppmärksammar information i matematiska uppgifter i ett försök att utforska delar av processerna som leder till förståelse.

Valet av den matematiska domänen innebär vissa begränsningar för räckvidden av resultaten. Detta diskuteras i avhandlingen. Resultaten från studierna som presenteras i avhandlingen visar att uppmärksamhet på problemrelevanta områden i ett visuellt stimuli är korrelerad till förståelse av uppgiften samt till hur pass väl man klarar av uppgiften (Andrà m fl., 2009; Lindström m fl., manus inlämnat; Lindström Gulz, 2008). Ett flertal olika metoder, som ögonrörelsemätning, observationer, intervjuer, med mera, används i försöken att närma sig "förståelse" (Lindström & Gulz, 2008; Holmqvist m fl., under utgivning; Lindström m fl., 2011).

Ett huvudsyfte är att försöka fånga den pågående förståelseprocessen. Processmått används både som en kontrast till och som ett komplement till produktmått (e.g.) (Andrà m fl., 2009; Holmqvist, Andrà, Lindström m fl., 2011; Lindström m fl., manus inlämnat). Specifikt har jag och mina kolleger utvecklat en ny metod för att fånga dynamiska processer i ögonrörelser (Holmqvist, Andrà, Lindström m fl., 2011). Metoden innebär att vi kan se på vilket sätt en student tittar på uppgiften och utifrån läsbeteendet dra slutsatser om informationen i uppgiften bearbetas. Till exempel kan vi se om studenten tittar översiktligt på all information eller om de till exempel tittar på delar av informationen i uppgiften. Detta kan ge oss ledtrådar till hur informationerna används i uppgiften.

Tillämpningsområden

Trots att endast en av studierna som presenteras i avhandlingen (Lindström m fl., 2011) genomförts i skolmiljö, är det underliggande syftet med studierna att resultaten från dem ska komma studenter till praktisk nytta. De pedagogiska implikationerna av resultaten diskuteras genomgående i artiklarna i avhandlingen (e.g. Gärdenfors & Lindström, 2009; Lindström m fl., manus inlämnat; Andrà m fl., 2009).

Resultaten från avhandlingen kan appliceras inom design av läromedel. Man kan till exempel markera information som hör samman för att stödja integrering av text och bild. En bildtext kan till exempel stödja en bild genom att peka ut detaljer i bilden som inte är självförklarande. Man kan även lära studenter att samma information kan representeras på olika sätt och träna dem i att bli skickliga på att använda många olika representationer för att beskriva samma sak. Till exempel "väder" kan beskrivas genom olika typer av representationer såsom tabeller över nederbörd, grafer som visar årsmedeltemperatur och med kartor som visar hur hög och lågtryck rör sig över ett område.

Avhandlingen ger en relativt detaljerad beskrivning av aspekter av vad människor gör när de förstår genom att fokusera på förståelse som att uppleva/se ett mönster och dess relation till visuell uppmärksamhet. Genom att använda kompletterande metoder inom detta forskningsområde finns goda möjligheter att i framtiden finna ytterligare pedagogiska såväl som didaktiska strategier som kan stödja studenters förståelse.

/ Paulina Lindström

Ny litteratur

Jonas Emanuelsson, Laura Fainsilber, Johan Häggström, Angelika Kullberg, Berner Lindström och Madeleine Löwing (red.) (2011). *Voices on learning and instruction in mathematics*. Göteborg: NCM.

Boken består av 23 artiklar och är avsedd att fungera som en utgångspunkt för vidare forskning och för att främja samarbete mellan olika forskargrupper. Artiklarna är resultatet av samarbeten mellan forskare vid olika fakulteter vid Göteborgs universitet och tar upp pågående och tidigare forskning om undervisning och lärande i matematik. Boken inleds med en översikt av den historiska utvecklingen av forskningsområdet vid universitetet samt två artiklar av Eva Jablonka (Luleå) och Jeremy Kilpatrick (Georgia). Avsnittsindelningen i boken är utifrån undervisningsstadier och går från förskola via grundskola och gymnasieskola till universitet och vuxenundervisning. Olika områden behandlas som tematiskt arbete, matematiska strukturer, utvärdering, styrdokument, problemlösning, högpresterande elever, begreppsbildning, kreativitet och lärarutbildning.

Boken går att beställa på NCMs hemsida www.ncm.gu.se

/ Kristina Juter

E-postadresser till medverkande i *Medlemsblad* nr 18

Christer Bergsten	christer.bergsten@liu.se
Åse Hansson	ase.hansson@ped.gu.se
Ylva Jannok Nutti	ylva.jannok-nutti@ltu.se
Kristina Juter	kristina.juter@hkr.se
Paulina Lindström	paulina.lindstrom@lucs.lu.se
Hanna Palmér	hanna.palmer@lnu.se
Eva Pettersson	eva.pettersson@bth.se
Kerstin Pettersson	kerstin.pettersson@mnd.su.se
Jörgen Sjögren	jorgen.sjogren@his.se

Telefoner och e-postadresser till medlemmarna i SMDF:s styrelse 2011

Ordförande	Christer Bergsten	013-282984	christer.bergsten@liu.se
Vice ordförande	Kristina Juter	044-203416	kristina.juter@hkr.se
Kassör	Lili-Ann Kling Sackerud	090-7867128	lili-ann.kling@matnv.umu.se
Sekreterare	Anette Jahnke	031-7866967	anette.jahnke@ncm.gu.se
	Thomas Lingefjärd	031-7732253	thomas.lingefjard@ped.gu.se

Redaktör för *Medlemsblad* nr 18 har varit *Kristina Juter*