

S MDF

Svensk Förening för MatematikDidaktisk Forskning

MEDLEMSBLAD

Nr 11

Juni 2005

INNEHÅLL

Medlemsblad nr 11 (<i>Christer Bergsten</i>)	1
Några rader från ... (<i>Christer Bergsten, Barbro Grevholm</i>)	2
Några aspekter av matematikens formelspråk (<i>Christer Bergsten</i>)	5
Har matematiken ett språk, egentligen? (<i>Östen Dahl</i>)	15
Matematikens två språk (<i>Christer Kiselman</i>)	21
Främlingskapet till formelspråket ... (<i>Håkan Lennerstad</i>)	43
Att kommunicera matematik i skolan (<i>Madeleine Löwing</i>)	59
Remissvar till MD (<i>Barbro Grevholm</i>)	71
Mathematics teaching and inclusion (<i>Arne Engström</i>)	81
E-postadresser och Anslagstavlan	83

Redaktör för Medlemsblad nr 11 har varit *Christer Bergsten*

Medlemsblad nr 11

Under rubriken *Några rader från...* berättar inledningsvis föreningens ordförande om vad som är på gång i SMDF och svensk matematikdidaktik i övrigt.

Medlemmarna i SMDF inbjuds att till medlemsbladet skicka in kortare artiklar eller berättelser, som kan vara av intresse för föreningens medlemmar att ta del av. Den stora aktivitet som ägde rum under 2004 inom vårt område har fått en intensiv uppföljning detta år och detta nummer av medlemsbladet visar på en del av dessa aktiviteter.

Den 18 mars arrangerade SMDF i samarbete med Svenska matematikersamfundet och Sveriges matematiklärarförening en workshop om matematikens formelspråk. Några av bidragen presenteras i detta nummer av medlemsbladet: Christer Bergsten behandlar några didaktiskt centrala aspekter av formelspråket, Östen Dahl ger ett lingvistiskt perspektiv på temat, Christer Kiselman identifierar förutom formelspråket också ett "matematikens fackspråk", Håkan Lennerstad skriver om ett främlingskap i förhållande till "matematiskan", och Madeleine Löwing diskuterar problem när det gäller att kommunicera matematik i skolan. Se mer om vad som hände på workshopen på dess hemsida www.mai.liu.se/~chber/workshop. En mer fullständig dokumentation är planerad att utkomma i höst.

Vidare återges SMDF:s remissvar på Matematikdelegationens betänkande, sammanställt av Barbro Grevholm baserat på synpunkter framförda i den arbetsgrupp som utsågs på SMDF:s årsmöte. Slutligen annonserar Arne Engström den tredje nordiska konferensen om matematiksvårigheter.

/ Christer Bergsten

Några rader från...

Första halvåret 2005 har för många inom vårt ämnes- och forskningsområde inneburit ett intensivt arbete på många fronter. SMDF:s årsmöte ägde rum den 28 januari på Lärarhögskolan i Stockholm, där det förutom normala årsmötesförhandlingar även genomfördes en diskussion om de möjligheter som Matematikdelegationens betänkande kan leda till. En arbetsgrupp, bestående av Barbro Grevholm (ordf.), Christer Bergsten, Thomas Lingefjärd och Eva Norén, utsågs för att för utarbeta SMDF:s svar på remissen. Svaret sammanställdes sedan av Barbro Grevholm och lämnades till Utbildningsdepartementet och finns att läsa i detta nummer av medlemsbladet.

Under våren genomförde SMDF ett historiskt sett första samarrangemang med både Svenska matematikersamfundet (SMS) och Sveriges matematiklärarförening (SMaL), en workshop om matematikens formelspråk som ägde rum vid KTH i Stockholm den 18 mars. Det blev en trevlig och intressant dag där vitt skilda perspektiv och infallsvinklar på ämnet diskuterades. För er som inte var med finns nu möjlighet att ta del av några av bidragen i detta nummer av medlemsbladet. En fullständig dokumentation är planerad till hösten.

Vid några internationella aktiviteter under våren har medlemmar från SMDF varit aktiva, till exempel vid den fjärde europeiska konferensen CERME, som ägde rum i februari i Sant Feliu de Guixols vid Costa Brava i Spanien, och vid ICMI Study 15 i Águas de Lindóia i Brasilien i maj, som behandlade lärarutbildning i matematik. Även vid kommande konferenser i sommar, som t.ex. PME 29 och ALM i Australien, är Norden representerat. Det är glädjande att nordiska matematikdidaktiker börjar bli alltmer synliga i alltfler internationella sammanhang.

Sedan sist har ytterligare några licentiatavhandlingar i matematikdidaktik lagts fram och försvarats. Forskarskolan går efter sommaren in i sitt sista verksamhetsår, varför det är viktigt med en fortsatt fördjupad diskussionen om kvalitetsfrågor. Den nordiska forskarskolan ordnade ett tvådagars seminarium i Korsør i slutet av april, där handledare träffades och arbetade med kvalitetsfrågor med direkt koppling till doktorsavhandlingar. Nästa träff blir ett endagsmöte dagen före Norma05, den 1 september, för handledare av doktorander, och kommer att fokusera på handledningsfrågor med Uri Leron som inbjuden expert. Under

hösten kommer också Ole Skovsmose att genomföra en utredning om kriterier för bedömning av licentiatavhandlingar inom RJ:s forskarskola.

Även vårt eget seminarium MADIF 5, som äger rum 24-25 januari 2006 i anslutning till Matematikbiennalen i Malmö den 26-27 januari, har frågor om kvalitet i sitt tema. Planeringen fortsätter och vi hoppas på aktivt deltagande från många av SMDF:s medlemmar i form av inskickade bidrag. Huvudföreläsare blir Werner Blum och Barbro Grevholm och i paneldebatten medverkar bland annat Gerd Brandell, Marit Johnsen Høines och Jeppe Skott. Vi ser fram emot en lika trevlig och inspirerande konferens som de tidigare. Vi har också mycket glädjande kunnat märka en efterfrågan på de konferensdokumentationer vi producerat.

Betydligt närmare i tiden ligger den nordiska konferensen NORMA 05, som äger rum i Trondheim 2-6 september. Det är ett rikt program som erbjuds, där det förutom de fem inbjudna plenarföreläsningarna accepterats trettiofyra papers, nio "short communications" och en workshop. Konferensen är viktig som ett led i det fina nordiska samarbete inom vårt område som fick en skjuts i början av 1990-talet och som förstärktes ytterligare genom arrangemanget av ICME 10 i Köpenhamn förra året.

Vid konferensen för lärarutbildare i matematik, LUMA'05 den 29-30 september (se webbsidan <http://www.lhs.se/ukl/matematik/LUMA/>), kommer SMDF som vanligt att ordna ett möte för medlemmarna. I förra numret av medlemsbladet efterlyste vi förslag till program vid detta möte och gör det här igen. Frågan hur lärarutbildningen ska kunna forskningsanknytas har till exempel lyfts fram av HSV:s utvärdering av landets lärarutbildningar. Hur ser det ut vid de olika högskolorna i denna fråga?

Från redaktionens sida saknar vi fortfarande en mer aktiv medverkan från SMDF:s medlemmar i form av debattinlägg, kortare eller längre artiklar och andra former av bidrag i medlemsbladet. Eftersom SMDF är en liten förening är det extra viktigt att alla medlemmar för fram sina synpunkter och idéer, det kan vara kommentarer till tidigare artiklar i medlemsbladet, inlägg i aktuell debatt om matematikutbildning och matematikdidaktisk forskning. Till exempel är revideringen av skolans kursplaner i matematik en angelägenhet där SMDF bör ta aktiv del.

Men nu är sommaren här och vi behöver alla en paus efter vårens intensiva arbete och semester för att samla ihop ny energi inför alla intressanta aktiviteter som väntar under hösten. Vi önskar alla medlemmar i SMDF en riktigt fin sommar!

*....från Barbro Grevholm, ordförande i SMDF
och Christer Bergsten, vice ordförande*

Några aspekter av matematikens formelspråk

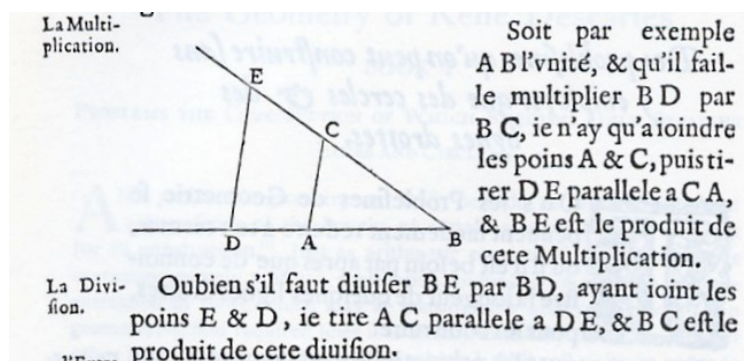
Dagens matematik är starkt förknippat med dess speciella symboler. Förutom talsymboler är detta historiskt sett en ganska modern koppling, då matematiken länge var i huvudsak retorisk till sin karaktär. Sedan algebran utvecklats från 1600-talet och framåt har ett allt mer sofistikerat och effektivt formelspråk blivit den moderna matematikens ansikte, på senare tid inte minst genom dess möjlighet att hanteras av avancerade datorprogram. Även skolmatematiken är starkt algebraiserad på gymnasienivå. Allt detta motiverar ett intresse att belysa detta matematikens formelspråk, både ur matematiska och didaktiska aspekter. Här kommer några sådana att tas upp, med en betoning på funktionella aspekter.

Algebraisering

Ibland får man höra att Descartes låste den västerländska filosofiska tanken i dualismens kniptång, dvs. separationen mellan ande och materia, men när det gäller matematiken, en liten bilaga med namnet *La Géométrie* (utgiven 1637) till hans filosofiska metod, befriade han snarare tanken från kalkylens börda, samtidigt som han uttryckte en tidig känsla av att algebra inte handlar om att fördjupa sitt tänkande, snarare tvärtom. Kanske införde han en annan dualism i den matematikfilosofiska diskursen, den mellan innehåll och form. Möjligen kan man tillåta sig att dra en viss parallell mellan dessa båda dualismer, ande och innehåll gentemot materia och form? Descartes text från 1637 ser fortfarande med 2000-talets ögon helt modern ut och han kan sägas vara skaparen av den algebraiska form som sedan blivit matematikens eget språk, även om en symbolisk uttrycksform för variabelidén presenterats av Viète ett 40-tal år tidigare. Det hävdas ofta att själva variabelidén fanns tillämpad redan hos Apollonius. (Se t.ex. Sfard, 1995)

Vad Descartes genomförde var en *algebraisering* av den klassiska geometrin: genom att beskriva geometriska kurvor som relationer mellan sträckor kunde han med bokstäver som symboler för sträckornas längder (relativt en given enhet, se figur nedan) beskriva dessa relationer med ekvationer med dessa symboler. Han visade hur de grundläggande operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division, samt rotutdragning enkelt kunde konstrueras på de givna sträckorna, vilket hade den enkla och geniala konsekvensen att det räckte att utföra operationerna på symbolerna för sträckorna för att studera geometriska

konstruktionsproblem. Effekten var dubbel: För det första kunde gamla geometriska problem (både lösta och olösta av grekerna) lösas med den nya metoden (ofta enkelt) och för det andra kunde man utgå från ekvationer och upptäcka geometriska kurvor ingen någonsin sett eller ens anat (se t.ex. Bergsten, 2004).



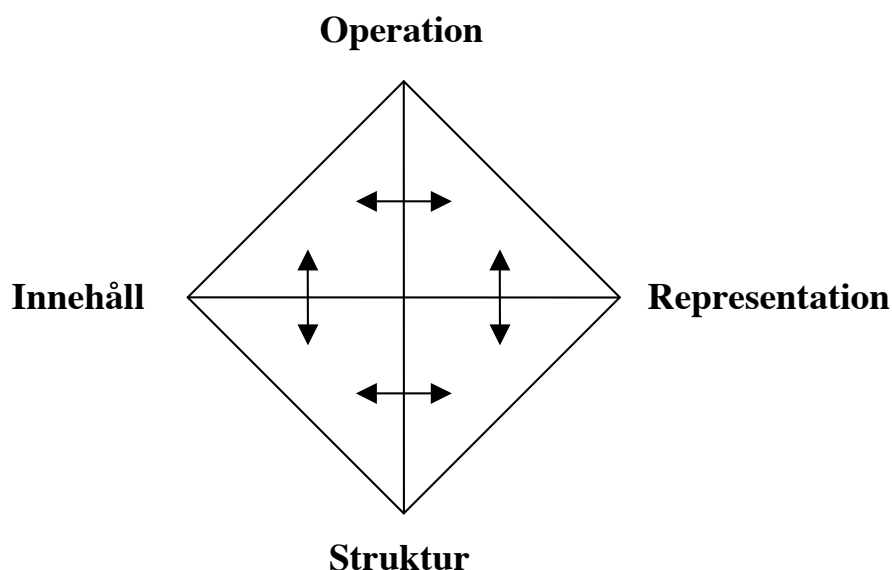
När man på detta sätt använder algebran, dels för att förstå ett annat innehållsområde som till exempel geometrin, dels för att utveckla det genom att gå vidare inom modellen (dvs. algebran), existerar ingen dualism mellan form och innehåll, det handlar snarare om en dialektik. Algebran är här dubbelt funktionell genom att inte vara enbart *representativ*, dvs. att som ett symbol-system betyda eller representera något, utan även *operationell*. Genom en formell transformation, som till exempel faktorisering, ekvationslösning eller derivering, kan en mening bli synlig, via den representativa funktionen, som i ett tidigare skede var dold. Till exempel ger uttrycket nedan, för en som kan läsa matematik, en mängd representativa tolkningar, till exempel en ekvation eller en bild som skärning mellan en rät linje och en rationell funktion.

$$\frac{13x^2 + 7}{x^2 + 10} = 2x$$

Vem ser här direkt att $x = \frac{1}{2}$ är en lösning till ekvationen, och vem ser de andra två reella lösningarna (som är $3 \pm \sqrt{2}$), eller att det överhuvudtaget finns två reella till? Det är den algebraiska kodens operationella funktion som möjliggör allt detta – det går (här enkelt) att ”lösa ut x ”. Som graf slingrar sig den rationella funktionen (för positiva x -värden mellan 0 och 5) ganska intrikat kring den räta linjen. Den operationella funktionen hjälper till att reda ut detaljerna i denna representativa bild. Relationen mellan mening och operation är dock ganska subtil. Ses uttrycket ovan som en ekvation är den ju ekvivalent med $13x^2 + 7 = 2x \cdot (x^2 + 10)$ men ”betyder” då grafiskt skärningen mellan ett andra- och ett tredjegradspolynom, alltså en helt ny ”mening”.

Form och innehåll

Ett försök att fånga detta nyss nämnda dynamiska samspel mellan matematikens form och innehåll, samt mellan operation och struktur, är den kristall för *matematisk operativitet* som ett dynamiskt system jag beskrev för 15 år sedan (Bergsten, 1990, s. 49):



Innehållet genererar formen, inklusive formelspråket. Men formen genererar i sin tur innehåll, som nämndes i samband med kommentarerna om Descartes. Det liknar dialektiken mellan tanke och ord. Matematikens utveckling illustrerar detta tydligt.

En tanke i samband med kristallen var också att den matematiska formen, definierad som symboluttrycks *mönster*, ibland kan ses direkt avspegla sitt matematiska innehåll. En tolkning av additionen $2 + 3$, till exempel, är att två högar med 2 respektive 3 objekt läggs intill varandra för att läggas ihop: **oo ooo**. Det konkreta arrangemanget återspeglas i symbolernas arrangemang. Just därför blir symbolmanipulationerna som grundas på denna operation isomorfa aktiviteter till motsvarande operationer på de konkreta objekten. Liknande bilder kan skapas för övriga räkneoperationer, mer avancerade operationer (och objekt) ärver sedan sina former från dessa grundläggande och det blir tydligt varför den symboliska matematiken fungerar (Bergsten, 1990, s. 166; jfr Kline, 1985), dvs att den representativa funktionen är stabil under den operativa. Den matematiska notation som visat sig ha livskraft har just denna

genetiska karaktär (Bergsten, 1990), eller som Leibniz uttryckte det (citerat i Cajori, 1928/29; se även Bergsten, 1990):

In signs one observes an advantage in discovery which is greatest when they express the exact nature of a thing briefly and, as it were, picture it; then indeed the labour of thought is wonderfully diminished.

Precis detta syns till exempel hos den algebraiska beskrivningen av kommutativitet för addition: $a + b = b + a$, där likhetstecknet fungerar som en spegel för den additiva formen.

De *stipulativa* (=icke-genetiska) former som finns med i skolmatematiken ställer ofta till didaktiska problem på ett helt annat sätt än de genetiska, till exempel kvadratrotssymbolen och potenser. En annan aspekt som är en styrka hos den algebraiska koden men ofta ett problem för den lärande, nämligen att i en och samma symbol (symboluttryck) finns ofta både en representativ och en operativ funktion tillgängliga och det är upp till sammanhang och uttolkare att välja väg. Tolkar man till exempel $2 + 3$ operativt blir förstås responsen kort och gott 5, men tolkar man det strukturellt (begrepps innehållsligt) blir responsen ”en addition, som har vissa strukturella egenskaper som till exempel kommutativitet”, och för denna representativa tolkning behöver man inte ”räkna ut vad det blir”. Collis (1974) kallade detta fenomen i matematiken att en uträkning kan ”avslutas” eller inte för *closure*. För en lärande blir lätt uttryck som inte når *closure* svårbegripliga och han/hon hittar sitt eget sätt att sluta den, vilket kan leda fel matematiskt. I den tidiga skolan tränas det ganska ensidigt på den operativa funktionen vilket leder till att elever kan få problem när det fortfarande är en addition men inte längre går att ”räkna ut vad det blir”, till exempel $x + 3$. I litteraturen har (den engelska) termen *procept* använts (Gray och Tall, 1991) för beskriva detta de matematiska symbolernas janusansikte. Procept är en ihopkoppling av termerna *process* och *concept* och pekar på den dubbla tolkningsmöjlighet som ofta finns i matematiska symboluttryck. Tall (2002) ger en generell bild av matematiken i tre ”världar”, där den som bygger på proceptuellt tänkande utgörs av aritmetiken och funktionsläran och är handlingsgrundad, till skillnad från den perceptionsgrundade geometrin. Den axiomatiska världen har växt fram ur dessa två världar.

Symbolkänsla

Att efter behov kunna se vad som är väsentligt i ett matematiskt symboluttryck, vad man kan göra med det osv., kallas med en engelsk term *symbol sense*, som jag en gång översatte med *symbolkänsla* (se t.ex. Bergsten, Häggström och

Lindberg, 1997). Tidigare användes en term *number sense* för aritmetiken för att fånga in det mångfacetterade och komplexa i en rik och flexibel uppfattning av vad tal är. Termen *symbol sense* sågs som en motsvarighet för algebran och blev kanske spridd genom en artikel av Abraham Arcavi (Arcavi, 1994), även om termen användes av andra tidigare (se Bergsten m.fl., 1997), redan under en konferens om datoralgebra i matematikundervisning, i Denison 1992 (Page, 1992, s. 72). I detta sammanhang föddes ju också ett behov av en sådan term. Redan Descartes uppvisade en långt driven symbolkänsla. Några kriterier för symbolkänsla beskrivs i Bergsten m.fl. (1997, s. 20):

- Uppskatta styrkan i det algebraiska symbolspråket
 - Använda symboler då de behövs
 - Överge symbolerna när man "drunknar" i dem, välj lämpligare angreppssätt
 - Inse vad en symbolisk lösning innebär
- Ha en förmåga att skriva om och "läsa" symboluttryck, och se detta som två komplementära aspekter av algebran (flexibilitet)
- Veta att verbal och grafisk information kan uttryckas algebraiskt/symboliskt, och kunna göra denna översättning
- Kunna och våga välja en ny symbolisk representation av problemet som passar bättre
- Inse att det är nödvändigt att under problemlösningen kontrollera och jämföra de symboliska uttryckens innehåll med vad man intuitivt känner att man ska få fram
- "Lita på" symboler, bl.a. att de kan visa på nya aspekter

Termen symbolkänsla underförstår i sig att det inte går att tala om en ren lingvistisk förståelse av det algebraiska formelspråket – det finns inget som ett rent formellt notationssystem i matematiken (Stenlund, 1996). Varje sätt att läsa en formel bygger på en tidigare *teckenpraxis*, en vana eller erfarenhet att veta vad man kan göra med olika konstellationer av symboler. Och detta av principiella skäl: Just detta faktum att börja använda en formalisering med symboler bygger på att man vet att det är möjligt, att man har erfarenhet och kunskap om det, som man tar med sig. Det är med detta synsätt meningslöst att prata om ett rent mekaniskt symbolmanipulerande, utan matematiskt innehåll. Däremot är det ett didaktiskt problem, då eleven i allmänhet saknar den erfarenhets- och kunskapsbakgrund som gör symbolmanipuleringen självklar för experten. För en matematiker/lärare är t.ex. derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

innehållsrik och därmed meningsfull för att han/hon både kan se dess representativa och operationella funktion. Läraren kanske förklarar den representativa genom en analogi med förändringskvot i någon konkret situation men vet samtidigt utan att säga det (eller kunna säga det) räknetekniskt vad man kan göra med den och vilka resultat som kan nås. För en elev kan den kännas helt meningslös då han/hon inte ser hela denna tekniska potential utan bara ett krångligt uttryck ofta utan tydlig koppling till den förklarade representativa bilden.

För att bygga vidare på Stenlunds analys, är alltså formelspråkets teoretiska och praktiska dimensioner oseparabla, och man borde i linje därmed kunna använda den epistemologiska didaktikteorins (utvecklad av Yves Chevallard) grundenhet för analys, en formelspråkets *praxeologi*. Inom en given institution används formelspråket som en metod att lösa vissa typer av problem (praktiskt kunnande). Detta formelspråk är därmed ett teoretiskt verktyg (en teknologi) med en teoriram som validerar dess användning (teoretiskt kunnande). Se t.ex. Barbé, Bosch, Fonseca och Gascon (2005) för en introduktion till detta teoretiska perspektiv.

Formlers egenskaper och struktur

Det finns flera analyser av formelspråkets egenskaper och struktur (t ex Bergsten, 1990; Boschet, 1989; Cajori, 1928/29; Pimm, 1987; Winslöv, 2000), där man bl.a. konstaterat att det är ett överraskande litet spektrum av rumsliga relationsprinciper som används. Bergsten (1990) noterade till exempel att de matematiska former (dvs. symboluttrycks mönster) som förekommer i den elementära skolmatematiken (aritmetik/algebra) är överraskande få.

Grundprincipen är linjäritet, en naturlig utveckling från det vanliga skriftspråket, där ord och satser listas i följd på motsvarande sätt som den talade motsvarigheten, i en temporal sekvens. I vårt alfabetiska språk, liksom i många andra men inte alla, ordnas ljudtecknen horisontellt, från vänster till höger. På samma sätt skrivs de flesta aritmetiska operationer, ekvationer, funktionsuttryck, integraler, osv., horisontellt linjärt, med vissa kompletterande radbrytande notationer (bråk, potens, index mm.). Detta har väl delvis sin grund i kraven på integration med det naturliga språkets sätt att skriva, med boktryckarkonstens tekniska restriktioner. För det mesta går det att läsa från vänster till höger, men oftast även i annan ordning. Ofta används parenteser för att styra vilka delar i ett uttryck som

ska tas för sig. Att vara ”läskunnig” i matematik innebär bl.a. just att kunna identifiera sådant. En matematisk formel innehåller oftast ett eller flera objekt och en eller flera operatorer som verkar på objekten samt ofta även symboler för relationer (likhetstecken osv.) mellan delar av formeln.

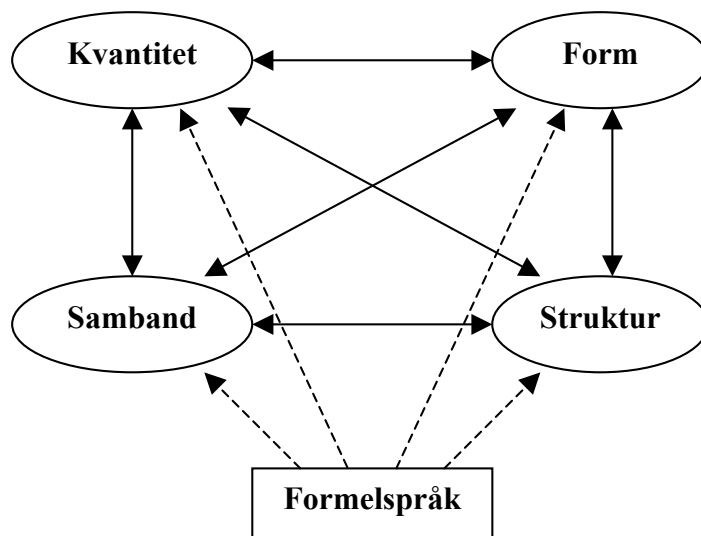
Trots den ofta linjära karaktären hos en formel är den dock mer en bild än en teckensträng och har en tvådimensionell karaktär mer än det naturliga språkets endimensionella. Genom att betrakta denna bild en stund, ungefär som man betraktar ett (logiskt-strukturellt) konstverk, ofta då genom att fokusera på olika delar i taget, se helheter och detaljer, och tänkbara transformationers konsekvenser, får den kompetente ”läsaren” en idé om hur den kan bearbetas, utifrån den aktuella frågeställningen. Det handlar här ofta om ett ganska intrikat och svåranalyserat spel där ofta inte formelns representativa funktion är lika aktiv som en kompetent av vad Pierce kallar *diagrammatiskt tänkande*, där formelns synliga och potentiella strukturella egenskaper (vad jag ovan kallade matematisk form eller mönster) spelar den avgörande rollen (se t.ex. Dörfler, 2004). Denna bildmässiga dimension utgör en symbolernas *ikoniska funktion*, som kan kallas formelspråkets tredje funktion (bredvid den representativa och den operationella), är säkert en viktig komponent i symbolkänslan. En annan aspekt av den ikoniska dimensionen, formelns genetiska karaktär, har redan berörts och utgör ytterligare en sådan komponent.

Algebra som didaktiskt verktyg

Inledningsvis nämnde jag Descartes *algebraisering* av geometrin. En diskussion kring innebörden i detta begrepp görs i Bolea, Bosch och Gascon (1999), som beskriver algebra inte som ett innehållsområde utan som ett modelleringsverktyg för matematikens innehållsområden:

Elementary algebra does not appear as a self-contained mathematical work comparable to other works studied in academic core courses (such as arithmetic, geometry, statistics, etc.), but rather as a modelling tool to be (potentially) used in all mathematical curricular works and which appears to be more or less used in them. (Bolea et.al., 1999, s. 141)

På detta sätt fungerar algebran som ett *didaktiskt verktyg* med vilket man kan nå djupare insikt inom innehållsområdet. Det matematiska formelspråket kan därmed liknas vid en dubbeleggad yxa, dvs. både ett problemlösningssverktyg och ett didaktiskt verktyg (Bergsten, 2003). Betraktar man matematiken i generell mening som ett systematiskt studium av kvantiteter, former, samband och strukturer, ger detta följande bild av formelspråkets roll för matematiken (efter Bergsten, 2003, s. 8):



Sammanfattningsvis ger diskussionen ovan en bild av några aspekter av matematikens formelspråk som kan illustreras med följande matris:

Användning / Funktion	Representativ	Operationell	Ikonisk
Problemlösningsverktyg			
Didaktiskt verktyg			

Vid ett konkret matematiskt arbete där formelspråket aktualiseras, som till exempel att undersöka värdet av integralen $\iint_{x^2+y^2 \leq 2x} \frac{dxdy}{|x|+|y|}$, är det dynamiken mellan matrisens olika delar som skapar en kombination av en möjlighet att kunna lösa den förelagda uppgiften och kunna uppleva en förståelse av arbetet och resultatet. Den inneboende komplexiteten i denna aktivitet har här bara kunnat antydass.

Referenser

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics* 14(1), 24-35.
- Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascon, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions at Spanish high schools. To appear in *Educational Studies in Mathematics*.
- Bergsten, C. (1990). Matematisk operativitet. En analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematik. *Linköping Studies in Education*. Dissertations No. 29.
- Bergsten, C. (1999). From sense to symbol sense. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I,II*, xxx-yyy. Osnabruck: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Bergsten, C. (2003). A classification of algebraic tasks. Presentation at the seminar *New trends in mathematics education research: an international perspective*, Bologna, February 27, 2003.
- Bergsten, C. (2004). Beyond the representation given – The parabola and historical metamorphoses of meanings. (Paper presented at PME28, Bergen 2004) *S MDF Medlemsblad*, nr 10, 37-49.
- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. Nämnaren Tema*. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.
- Bolea, P, Bosch, M & Gascon, J. (1999). The role of algebraization in the study of a mathematical organisation. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I,II*, 138-148. Osnabruck: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Boschet, F. (1989). Fonctions du code symbolique dans le discours mathématique. *Educational Studies in Mathematics* 18, 19-34.
- Cajori, F. (1928/29). *A history of mathematical notations, Vol I & II*. Chicago: Open Court.
- Collis, K. (1974). *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint*. Melbourne: Australian Council for Educational Research.
- Descartes, R. (1954). *The geometry of Rene Descartes*. (transl. by D. Smith and M. Latham) New York: Dover.
- Dörfler, W. (2004). Mathematical reasoning and observing transformations of diagrams. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Mathematics and language. Proceedings of Madif4* (pp. 7-19). Linköping: S MDF.
- Gray, E. & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference, Vol II*, 72-79. Dipartimento di Matematica, Università di Genova.
- Kline, M. (1985). *Mathematics and the search for knowledge*. New York: Oxford University Press.

- Page, W. (1992). Computer algebra systems and parameters of instruction. In Z. Karian (ed.), *The use of symbolic computation in undergraduate mathematics. Proceedings of the Denison conference* (pp. 69-76). The Mathematical Association of America.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge.
- Schweiger, F. (2000). The implicit grammar of mathematical symbolism. In B. Barton (Ed.), *Communication and language in mathematics education: The pre-conference publication of working group 9*, 71-79. (ICME 9, 30th July-6th August, 2000, Makuhari, Japan) MEU Series #2, The University of Auckland.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior* 14(1), 15-40.
- Stenlund, S. (1996). Poincaré and the limits of formal logic. In J-L. Greffe, G. Heinzmann & K. Lotenz (Eds.), *Henri Poincaré, Science and philosophy. International Congress, Nancy, France, 1994*. Akademie Verlag, Berlin, Albert Blanchard, Paris, pp. 467-479.
- Winslöv, C. (2000). Transformations in mathematical discourse. In B. Barton (Ed.), *Communication and language in mathematics education: The pre-conference publication of working group 9*, 93-102. (ICME 9, 30th July-6th August, 2000, Makuhari, Japan) MEU Series #2, The University of Auckland.

/ Christer Bergsten

Har matematiken ett språk, egentligen?

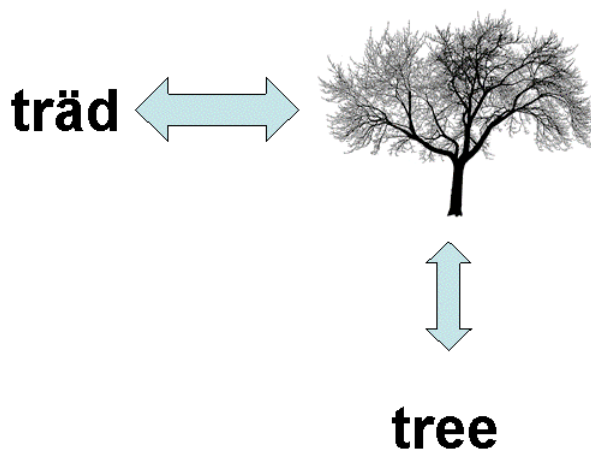
I den här uppsatsen vill jag diskutera frågan om matematikens språk ur en lingvists synvinkel. Eftersom mina egna matematikstudier avslutades på ett relativt tidigt stadium, tänker jag mest hålla mig till ett exempel som jag känner mig någorlunda säker på, nämligen Pythagoras' sats, och för att göra det enkelt för mig själv återger jag den här i den version som finns på webbsajten susning.nu:

Summan av kvadraterna på kateterna är lika med kvadraten på hypotenusan.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Det första vi kan konstatera är att (som Christer Kiselman också framhöll i sitt föredrag vid workshopen) det finns två kandidater till benämningen "matematikens språk". I exemplet ovan uttrycks Pythagoras' sats dels på ett språk som bara skiljer sig från vanlig svenska genom förekomsten av matematiska termer som *katet* och *hypotenusan*, dels med hjälp av en formel. Även om det i allmänhet är formelspråket man avser med "matematikens språk" är ju också den matematiska svenskan intressant att studera som sådan. Det är vidare så att båda de här "språken" har en del kanske lite oväntade egenskaper. För att kunna diskutera dem måste vi först diskutera några mera allmänna aspekter av hur språk fungerar.

För att förstå ett språkligt uttryck behöver vi kunskap av flera olika slag. Till att börja med måste man i tillräcklig grad behärska själva språket – dess grammatik och ordförråd. De här sorternas kunskap kan man kalla **grammatisk** och **lexikal**. Den grammatiska kunskapen kommer jag inte att säga så mycket om här, även om den är central för språkförståelsen. Den lexikala kunskapen innebär främst att vi har kunskap om ordens betydelse – i de enklaste fallen, att vi kan förknippa orden med en viss utomspråklig verklighet, som i följande bild:



Men förutom den språkliga kunskapen behöver man också icke-språklig kunskap (som ibland kallas **encyklopedisk**). Begrunda t ex följande mening:

Jag har inte fått så mycket äpplen på sistone, så jag måste nog snart beskära träden.

För att förstå poängen med detta påstående, räcker det inte att veta vad orden betyder, utan man måste också veta sådana saker som att äpplen växer på träd (vilket ju kan tyckas vara ganska trivialt) och att man ibland måste beskära äppelträd för att det ska bli äpplen på dem (något mindre trivialt). Som bland annat filosofen Quine har framhållit, finns det knappast någon klar gräns mellan lexikal och encyklopedisk kunskap. Någon skulle t ex kunna hävda att det är en del av betydelsen hos ordet *äpple* att äpplen växer på träd, och det är inte helt självklart hur man ska argumentera emot en sådan ståndpunkt. Under alla förhållanden kan vi notera att förståelse av språkliga uttryck i allmänhet fordrar bakgrundskunskap.

I olika sammanhang brukar man framhäva kontextens roll för förståelse. Kontext är nu ett väldigt vitt begrepp. Jag tänker här ta upp en sida av kontextens roll som jag ska kalla förståelsen av referentiella bindningar. Detta kräver emellertid lite bakgrund.

Pythagoras' sats uttrycker ju ett påstående. (Matematiker brukar, tror jag, använda termen "utsaga". Både "påstående" och "utsaga" används på ett lite vagt sätt där de kan tolkas både som den talhandling som utförs och innehållet i talhandlingen. Men detta är inte så viktigt för diskussionen här.) I en svensk grammatik kan man hitta exempel på påståendesatser som ser ut så här:

Pelle gillar Lisa.

Den här satsen handlar om två individer som sägs ha en viss relation till varandra. Mera generellt kan påståendesatser sägas **predicera** egenskaper eller relationer om individer eller andra entiteter, som man **refererar** till i satsen. För att kommunicera ett påstående måste en talare ge sin lyssnare tillräcklig information för att identifiera å ena sidan referenterna (det man talar om), å andra sidan vad som prediceras (det man säger om referenterna). För kommunikationen spelar det egentligen mindre roll hur man bär sig åt för att åstadkomma detta. I stället för att använda ord kan man till exempel peka på det man vill tala om. Har man en gång identifierat en referent kan man sen för det mesta använda pronomen:

Hon ser honom.

I talspråket är det faktiskt mindre vanligt att man identifierar en referent och påstår något om honom/henne/den/det i samma sats. I stället tenderar man att bryta ut identifikationen på exempelvis följande sätt:

Den där killen som bor hos oss du vet, han ska åka hem imorgon.

Vad man gör här är alltså att först tala om vem man vill tala om genom uttrycket *den där killen som bor hos oss du vet* och sen använda pronomenet *han* i satsen som uttrycker själva påståendet.

Vi är ofta ganska implicita när det gäller referens. Antag att man ser följande rubrik i en tidning:

Göran Persson möter opposition inom partiet.

Det är inte utsagt här vilket parti det handlar om, men vi förstår utan vidare att det måste vara Göran Perssons eget parti. I en annan kontext skulle vi få en annan tolkning. I följande mening antar vi att *partiet* refererar till kommunistpartiet, eftersom det var det enda tillåtna i Sovjet:

Solzjenitsyn var inte medlem av partiet.

Med referentiella bindningar menar jag alltså de länkar ut i världen som krävs för att vi ska förstå vad ett påstående handlar om.

Det som jag nu har sagt om språklig kommunikation i allmänhet är också tillämpligt på matematikens språk. Man föreställer sig väl gärna att matematiker uttrycker sig på ett exakt och entydigt sätt. I själva verket är det lätt att se att även om ett matematiskt påstående kan vara exakt, är det språkliga uttryck man använder ofta lika implicita som de påståendesatser vi hittar i vardagsspråket. En direkt konsekvens av detta är att läsaren måste använda den kunskap han eller hon redan har för att förstå ett matematiskt påstående. Låt oss igen titta på Pythagoras' sats:

Summan av kvadraterna på kateterna är lika med kvadraten på hypotenusan.

I det här påståendet samverkar den lexikala betydelsen på ett intressant sätt med kontexten. En uppenbar sak som man måste förstå här är att alltihop handlar om en rätvinklig triangel. Den som kan matematik har ingen svårighet att dra denna slutsats trots att satsen inte explicit inleds "I en rätvinklig triangel...". I Bonniers Svenska Ordbok definieras *katet* som "var o. en av kortsidorna i en rätvinklig triangel" och *hypotenus* som "längsta sidan i en rätvinklig triangel". Vi ser att här behöver man en del bakgrundskunskap (som för de flesta av oss är

så pass självklar att vi sällan reflekterar över den). Om man till exempel inte vet att det bara finns en rät vinkel i en triangel och att den sidan som står emot den räta vinkeln är den längsta, blir definitionerna av *katet* och *hypotenus*a ganska obegripliga. Men vi ser också att den som känner till definitionerna också kan dra slutsatsen att påståendet handlar om rätvinkliga trianglar, eftersom det bara är för dem som termerna är definierade.

För att förstå substantivet *kateterna*, som ju står i bestämd form, måste vi konstruera en referentiell bindning till en rätvinklig triangel. 'Katet' är ett relationellt begrepp i den meningen att en katet alltid måste tänkas som del av en triangel, den kan inte existera som ett självständigt objekt. Nu handlar inte Pythagoras' sats om någon viss triangel utan är i stället ett generellt påstående som är sant om alla rätvinkliga sådana. Detta är ytterligare ett exempel på implicit information som inte ges något språkligt uttryck, och att vi uppfattar påståendet på rätt sätt när vi läser det i en lärobok i geometri beror förmodligen på att vi har kunskap om vilken sorts påståenden som kan uppträda i en sådan text. Men det finns ytterligare implicit information som är så självklar för oss att det till och med verkar närmast knäppt att ifrågasätta den. Hur vet vi egentligen att det handlar om samma triangel hela tiden? Kanske Pythagoras i själva verket menade att kateterna fanns i en triangel och hypotenusan i en annan? Förmodligen handlar det här om väldigt generella principer för kommunikation och förståelse.

Sammanfattningsvis: förståelse av språkliga uttryck kräver bakgrundskunskap och kopplingar till kontexten, och matematikens språk är inget undantag från detta.

Hittills har jag egentligen bara talat om det första av de två matematikspråken – dvs. vanlig svenska med tillägg av matematiska termer. Hur är det nu med formelspråket? Man kanske skulle kunna tro att matematiska formler skulle vara exakta och kontextoberoende. I praktiken är detta inte alls fallet. Betrakta Pythagoras' sats uttryckt som formel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Det är lätt att inse att denna formel tagen för sig själv inte uttrycker något bestämt påstående över huvud taget. Den kan sägas predicera en relation mellan tre storheter, a , b och c , men ingen som helst information om vilka dessa storheter är ges i själva formeln. Om man vill uttrycka Pythagoras' sats helt explicit, är det ganska svårt att göra det med matematisk standardnotation. Jag har försökt åstadkomma det med hjälp av predikatlogisk notation, men det visar

sig vara rätt krångligt eftersom predikatlogiken inte är så bra på att referera till flera objekt på en gång.

Hur fungerar då en sådan här formel i en matematisk text, t ex en lärobok i geometri, om den inte innehåller den nödvändiga informationen om referenterna? Det finns åtminstone två olika möjligheter: antingen åtföljs den av en fullständig formulering på vanligt språk, som den vi har sett ovan, eller också ser det ut som i de här exemplen hämtade från nätet, där man nöjer sig med att identifiera referenterna med vanligt språk och sedan låter formeln uttrycka påståendet om dem:

$A^2 + B^2 = C^2$, där A och B är kateterna (de kortare sidorna) och C är hypotenusan (den längsta sidan) i en rätvinklig triangel.

Om kateterna är a och b och hypotenusan c så säger Pythagoras sats att $a^2 + b^2 = c^2$.

Vad jag som språkvetare finner lite intressant är att symbolerna a , b och c här får spela en roll som mycket liknar den som pronomen har i talspråket (jämför exemplet ovan). Det blir en arbetsfördelning mellan det vanliga språket och formelspråket, så att de kontextuella bindningarna görs i vanligt språk och bara själva predikationen uttrycks som en formel.

Här kommer jag nu till frågan i rubriken till uppsatsen. Det matematiska formelspråket som det används i matematikundervisningen fungerar egentligen inte som ett självständigt språk utan snarare som ett komplement till det vanliga ("naturliga") språket. I viss mån kan formelspråket sägas vara ett hjälpmedel som fungerar analogt till andra grafiska presentationsformer som diagram och bilder. Men det är också lite intressant att det finns paralleller på flera andra områden, där man också har "formelspråk" som används för att komplettera det vanliga. Det är kanske inte så konstigt att man hittar sådant inom naturvetenskaperna, där ju matematikens tillämpningar spelar en viktig roll. Men även inom mera vardagliga områden som sällskapsspel finns väl utvecklade "formelspråk" som kan blandas med vanlig text (exempel från nätet):

Schack:

10...Ke7-d6

Svart kan inte spela 10...Dd8xd5, eftersom vit bara spelar 11.Df3xd5. Men naturligtvis borde svart nu gått tillbaks med kungen med 10...Ke7-e8. Att vandra ut på brädet med den värdefullaste pjäsen är verkligen att utmana ödet.

Bridge:

Väst spelar ut ♦K och du får hantera följande resurser:

- 32
- T9765
- T932
- A3
- AQJ98765
- 8
- 4
- KQ2

Med programmeringsspråk förhåller det sig lite annorlunda eftersom de måste kunna förstås direkt av en dator. Men eftersom datorprogram är ganska svårbegripliga även för de som själva skriver sådana brukar det höras till att man blandar upp programkoden med kommentarer i vanligt språk.

De här funderingarna om matematikens språk skrapar naturligtvis bara på ytan. Jag har egentligen bara diskuterat ett exempel – Pythagoras sats. Formler i matematisk text uttrycker långt ifrån alltid påståenden (axiom eller teorem). Ekvationer, som ju utgör en stor del av de formler man ser, kan inte sägas påstå någonting – de är varken sanna eller falska så länge vi inte har bestämt värden på de ingående variablerna. Språkligt kan de väl närmast jämföras med frågor, närmare bestämt frågeordsfrågor, d v s sådana som inleds med *vem*, *vad* etc. till skillnad från ja-nej-frågor. Det är inte klart i vilken utsträckning man här kan tala om kontextuella bindningar.

Jag tror emellertid att det skulle kunna vara fruktbart att tänka vidare på hur den matematiska kommunikationen fungerar.

/ Östen Dahl

Matematikens två språk

Christer Kiselman

1. Inledning: Var finns matematiken? Var finns språken?

Vad menas med att matematiken finns? Finns matematiska konstruktioner i verkligheten? Finns språken i verkligheten? Och var i så fall?

Uppenbarligen finns språken på något sätt i våra hjärnor, dvs. i var och en av våra hjärnor. Men det räcker inte. På något sätt finns språket också i vårt kollektiva medvetande. Det är så att språket har både en fysiologisk existens, en viss lokalisering till vissa delar av hjärnan – man kan ju till och med mäta språkaktiviteter i hjärnan med magnetkamera – och en social existens inom hela språksamfundet. På samma sätt är matematiken lokaliserad i hjärnan, men också i ett kollektivt medvetande i ett samfund som är spritt över världen. Där har vi en viktig likhet mellan språken och matematiken. Båda har såväl en fysiologisk existens som en existens i det kollektiva medvetandet.

Titeln *Matematikens två språk* har jag valt för att jag anser inte bara att det är formelspråket som är ett specifikt matematiskt språk utan även att det matematiska fackspråket utan formler är ett speciellt, avvikande språk, och att det orsakar svårigheter vid studier lika väl som formlerna, även om svårigheterna är av olika natur i de två fallen.

Svårigheterna hos det matematiska fackspråket utan formler är kanske mer förrädiska än formlerna, eftersom man inte alltid märker skillnaderna, medan formlerna ju står ut som avvikare redan från början. Dessa tankar har jag haft länge, innan jag läste artikeln av Lennerstad & Mouwitz (2004); när jag såg att de hävdar att matematiken är tvåspråkig, så stämde det precis. Men det bör tilläggas att det inte handlar om två självständiga språk: formler utan sammanhang, definitioner och antaganden är meningslösa; å andra sidan behöver fackspråket formler när det blir för komplicerat med bara ord.

Huvudtesen i mitt föredrag är redan framlagd ovan. I avsnitt 2 pekar jag på att matematiken går utöver det som man vanligen avser med ett språk. Efter några mer eller mindre tankeväckande citat i avsnitt 3 talar jag kort om makten över språket i avsnitt 4 – det blir mest frågor där. Avsnitten 5–13 är en samling observationer, där jag pekar på likheter och olikheter mellan allmänspråket och de två matematiska språken. Avsnitt 14 om ett australiskt språk och avsnitt 15 om gruppteori är insatta för att de kanske kan ge andra perspektiv utan att för den sakens skull hålla sig till ämnet.

Om mig själv

Jag är sedan barnaåren språkintresserad. Jag lever mina dagar på fyra språk. Det ger mig en känsla av att leva i fyra världar samtidigt, men den känslan är kanske illusorisk. Kanske är det bara en enda värld, en värld som ses ur litet olika vinklar – vad nu skillnaden kan vara mellan dessa alternativ.

Jag har intresserat mig för det svenska språkets ställning och ordförråd inom teknik, matematik och naturvetenskap. Jag arbetar till exempel med ett nationellt projekt rörande matematikterminologi i skolan. Jag har personliga erfarenheter av hur personer som lider av schizofreni använder sig av språket: det är förunderligt svårt att tränga in i och förstå deras språk. Detta är dock ingenting som jag har forskat på.

2. Matematiken är mer än ett språk

Man säger ofta att matematiken är ett språk, och då tänker man på formelspråket. Det kanske ligger något i det, men jag vill hellre säga att matematiken *har* ett språk. Ett språk som liknar andra språk, men som också uppvisar stora olikheter. Jag vill här i dag peka på några likheter och olikheter.

När man säger att matematiken *är* ett språk, så riskerar man att glömma andra sidor av matematiken som inte så lätt låter sig inordnas i den liknelsen. Det är ganska klart att matematikens formelspråk utvecklats under lång tid från ett förkortat skrivsätt till att vara mera likt en räknare. Ordet *minus* förkortas till ett *m* med streck, $\overline{m}$, och sedan överlever bara strecket, som ursprungligen angav att några bokstäver utelämnats. Så kom troligen det nu använda minustecknet, $-$, till. Detta är en historia om förkortningar.

Men när man kommer till kedjeregeln,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx},$$

så börjar formeln likna en liten räknemaskin. Därigenom går formlerna utöver språkens idé.

Ännu tydligare kanske detta framgår av följande exempel. Låt oss jämföra en formel med hur den kan läsas ut:

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Integralen över högra halvaxeln av basen för de naturliga logaritmerna upphöjd till minus ett positivt tal gånger variabeln är lika med ett genom talet.

Den sista meningen är ekvivalent med formeln. Det går i alla fall att definiera alla ingående ord så att den blir ekvivalent med formeln. Men om man skall räkna ut integralen så är formeln vida överlägsen. Formeln ger inte bara en förkortning av det långa uttrycket, utan också ett skrivsätt som underlättar uträkningen. Det är lätt att införa en ny variabel $t = ax$, och man ser då att integralen måste ha formen C/a för någon konstant C ; det återstår att bestämma denna. Tänk om vi skulle försöka göra en variabelsubstitution i det andra uttrycket ...

Man kan förutsäga solförmörkelser med stor precision långt in i framtiden. Man kan beräkna hur ett flygplan bär sig åt i luften och behöver inte göra så många vindtunnelexperiment eller andra försök. Allt detta är välkänt, och jag skall inte uppehålla mig vid det, bara konstatera att detta knappast kan höra hemma under det som man normalt kallar språk.

Men ännu viktigare är kanske att geometrin, en viktig del av matematiken, knappast kan uppfattas som ett språk – eller i så fall som ett radikalt annorlunda. Geometrin är förknippad med människans spatiala och motoriska begåvning, och jag tror att den spatiala och motoriska begåvningen är av annat slag än den språkliga. Den som kan teckna och måla har en tvådimensionell spatial begåvning; den som kan teckna av omvärlden har en tredimensionell spatial begåvning, liksom den som kan snickra eller bygga modeller eller lägga plåttak. En balettdansös har en motorisk och spatial begåvning – jag skulle vilja säga tempo-spatial begåvning. Alla dessa aktiviteter hör samman med geometrin, och förmågan att tänka, rita

och konstruera något i tre dimensioner är en genuint geometrisk begåvning. Matematikerna håller inte bara på med tre dimensioner utan även med fyra eller fem eller oändligt många, vilket förutsätter att man kan se (vad nu det betyder) i fyra eller fem eller oändligt många dimensioner. Faktum är att man kan träna sina (inre) ögon att se i fyra dimensioner.

Allt detta fångar man inte in om man säger att matematiken är ett språk – med mindre än att man inkluderar all denna motoriska och spatiala förmåga i språket förstås. Är en balettdansös' rörelser ett språk? Om ni svarar ja på den frågan, så har jag ingen invändning, men vi måste i så fall konstatera att begreppet språk har vidgats väsentligt. Det jag sagt visar ändå att matematiken, speciellt geometrin, går utöver det man vanligen brukar kalla språk.

Det matematiska språket måste finnas för att man skall kunna förmedla kunskaper, men upptäckten av dem kanske sker genom en intuitiv spatial upplevelse. Våra förfäder gungade nog i träden, och detta gungande gav upphov till en intuitiv, ordlös förståelse för svängande förlopp. De apor som inte klarade av denna förståelse föll ned ur träden, och vi har ärvt denna intuitiva förståelse från dem som överlevde, inte från dem som föll ned. Det är en enkel och lättbegriplig form av darwinism. Och denna intuitiva förståelse för svängningar finns nu formaliserad i Fourieranalysen, en viktig gren av matematiken som handlar om alla slags svängningar: ljus, ljud och alla andra vågrörelser.

Åter till matematikens språk. Bakom ett språk finns en kultur, en viss grupp, ett samfund, som bär upp språket. När man lär sig ett språk, så får man en nyckel till detta samfund, och kan uppleva något av det. Kanske kan man lära sig något om Japan utan att kunna japanska, men i så fall behöver man tolkar och översättare. På samma sätt kanske man kan säga att man behöver lära sig det matematiska språket för att komma matematiken nära, och om man inte har gjort det, så fordras det tolkar och översättare. Och man kan undra om det finns tillräckligt många tolkar och översättare från matematiska respektive japanska. För att det hela skall fungera behövs det inte bara tolkar och översättare utan också japaner.

Vad är det då man når i matematiken, vad motsvarar kulturen hos den grupp som talar ett visst språk? På det kan man fundera. Mitt något provisoriska svar är att det är sammanhang och förståelse. Och människan behöver sammanhang och förståelse i sin värld.

3. Några citat

Efter en kanske alltför abstrakt inledning kan vi mjuka upp oss med några citat, först ett av Goethe, som kan konsten att förolämpa åt två håll samtidigt:

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.

Johann Wolfgang von Goethe, 1749–1832.
Goethes Werke Band XII, "Maximen und Reflexionen". Sjätte uppl., Hamburg 1967

Graden av abstraktion är viktig för Bertrand Russell, som menar att allmänspråket säger för mycket; det gäller att ta bort betydelser (och *abstrahera* betyder ju just 'dra bort' eller 'dra av').

Ordinary language is totally unsuited for expressing what physics really asserts, since the words of everyday life are not sufficiently abstract. Only mathematics and mathematical logic can say as little as the physicist means to say.

Bertrand Russell, *The Scientific Outlook*, 1931

Differentialkalkylen fungerade till en början utan en fast bas, menar han:

Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be.

Bertrand Russell i N. Rose, *Mathematical Maxims and Minims*, Raleigh, NC, 1988

Är matematiken anpassad till naturen? Eugene P. Wigner menade ju det, men enligt Russell skulle matematiken duga även för ett annat universum:

It can be shown that a mathematical web of some kind can be woven about any universe containing several objects. The fact that our universe lends itself to mathematical treatment is not a fact of any great philosophical significance.

Citerad i W. H. Auden and L. Kronenberger, *The Viking Book of Aphorisms*, New York 1966

Mera cyniskt formulerade han matematikens allmängiltighet så här:

Mathematics may be defined as the subject where we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.

CPBR 3:366:31-3, *Recent Work on the Principles of Mathematics*, även känd som *Mathematics and the Metaphysicians*

Men matematiken är ändå bara en omformulering av annat språk:

... mathematics is only the art of saying the same thing in different words.

Autobiography, Vol. 3, näst sista stycket

Ett lidande som flera kan känna igen beskrivs av Robi Polikar:

One thing I suffered while I was learning the basics of the wavelet transform is the fact that the majority of the articles and books (if not all of them) are written by *math people*, for the *math people*, in a language which even most of the math people themselves cannot understand [...]

Robi Polikar, *The Wavelet Tutorial*

Vem kan bli matematiker? Begåvning räcker kanske inte. Det skulle i alla fall gälla om Dan Andersson (1888–1920), menade hans far:

Hans fattningsgåvor voro över det normala, såväl teoretiskt som i praktiskt avseende, och han hade kunnat utbildas till vad som helst utom matematiker.

Minnesord av Dan Anderssons far, citerade efter Torsten Fogelquists essä, s. XXVI, i Dan Andersson, *Kolarhistorier*, Stockholm: Tidens förlag, 1930.

4. Makten över språket

Det går inte att undvika att tala om makt när det gäller språk. Lewis Carroll¹ har uttryckt det rakt på sak i *Through the Looking Glass* (The Millennium Fulcrum Edition 1991), kapitel VI, "Humpty Dumpty":

‘I don’t know what you mean by “glory,”’ Alice said.

¹Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson) föddes 1832-01-27 i Daresbury, Cheshire. Han dog i Guildford 1898-01-14.

Humpty Dumpty smiled contemptuously. 'Of course you don't – till I tell you. I meant "there's a nice knock-down argument for you!"'

'But "glory" doesn't mean "a nice knock-down argument,"' Alice objected.

'When *I* use a word,' Humpty Dumpty said in rather a scornful tone, 'it means just what I choose it to mean – neither more nor less.'

'The question is,' said Alice, 'whether you CAN make words mean so many different things.'

'The question is,' said Humpty Dumpty, 'which is to be master – that's all.'

Alice was too much puzzled to say anything, so after a minute Humpty Dumpty began again. 'They've a temper, some of them – particularly verbs, they're the proudest – adjectives you can do anything with, but not verbs – however, *I* can manage the whole of them! Impenetrability! That's what *I* say!'

'Would you tell me, please,' said Alice 'what that means?'

'Now you talk like a reasonable child,' said Humpty Dumpty, looking very much pleased. 'I meant by "impenetrability" that we've had enough of that subject, and it would be just as well if you'd mention what you mean to do next, as I suppose you don't mean to stop here all the rest of your life.'

'That's a great deal to make one word mean,' Alice said in a thoughtful tone.

'When I make a word do a lot of work like that,' said Humpty Dumpty, 'I always pay it extra.'

'Oh!' said Alice. She was too much puzzled to make any other remark.

Vem har nu makten över språket? Det har språkbrukarna, svarar alltid språkvårdarna. Och det är förstås rätt svar. Men eftersom matematiken är ett kulturellt element och en subkultur,² så kan svaret inte vara så enkelt när det gäller de två matematiska språken, det utan formler och formelspråket. Här kan man ana en spänning. Många hatar formler. De kan ha

²Se Kiselman (1997:46–47) om matematiken som kulturellt element och subkultur.

makt att ta bort formler. I Nationalencyklopedin berömde sig fysikerna av att kunna förklara fysik utan att använda formler. Många hatar också det matematiska fackspråket utan formler: det anses arrogant. Men matematikerna är ingen mäktig grupp. Tvärtom: de utgör en mycket liten grupp med liten makt i samhällena där de verkar. Det skulle vara intressant att kunna utveckla dessa motsättningar närmare.

5. Om och omm

Vardagens språk och matematikens är olika. Vanligen har allmänspråket mer redundans än matematikens språk. En vanlig iakttagelse är att ett enda ord kan spela stor roll i en matematisk facktext, mycket större än i allmänspråket med sin större redundans. Detta vållar välkända problem i utbildningen.

En annan skillnad är att allmänspråket ofta innehåller många outtalade förutsättningar. I matematiken bör förutsättningar anges så explicit som möjligt. Detta gör det matematiska språket tungt. Men att ange förutsättningarna är förstås nödvändigt, och ger en träning i logiskt tänkande.

Det matematiska fackspråket använder ofta ord från vardagsspråket i en ny betydelse. Visserligen finns det lärda ord som *algebra*, *topologi*, *homomorfism* och *homeomorfism*, men vardagsord som *mängd*, *följd*, *familj*, *grupp*, *ring* och *kropp* förekommer ofta. Om man hör ett ord som *homeomorfism* så förstår man att det betecknar något mer eller mindre avancerat begrepp, men när man talar om en grupp är det inte uppenbart att ordet har en annan, precis betydelse. Här finns hel skala, från ord som *följd*, som har en betydelse nära den vanliga, till ord som *finare*, *starkare* respektive *grövre*, *svagare* (om topologier), som närmast är metaforer. Mall Stålhammar (1997) har studerat metaforerna i fackspråk och allmänspråk, dock inte inom matematiken. Det skulle vara intressant att utvidga hennes studie till matematiken, men det står i all fall klart att det finns många paralleller mellan metaforerna i det matematiska språket och dem som hon studerar.

Vissa ord i allmänspråket används ganska slarvigt – sett ur matematikerns synpunkt. Ett vanligt exempel är ordet *om*, som förekommer i vardagsspråket lika väl som i det matematiska språket. Men att orden förekommer i de två språken innebär inte att de har samma betydelse. Man

skiljer i vardagsspråket inte så noga mellan $A \subset B$ eller $A = B$, eller mellan *om* och *om och endast om*. Här kan återigen Lewis Carroll ge oss ett exempel. Alice råkar ut för konflikten mellan de två språken i hans saga *Alice's Adventures in Wonderland*, kapitel VII, "A Mad Tea-Party"

'Do you mean that you think you can find out the answer to it?' said the March Hare.

'Exactly so,' said Alice.

'Then you should say what you mean,' the March Hare went on.

'I do,' Alice hastily replied; 'at least – at least I mean what I say – that's the same thing, you know.'

'Not the same thing a bit!' said the Hatter. 'You might just as well say that "I see what I eat" is the same thing as "I eat what I see"!''

'You might just as well say,' added the March Hare, 'that "I like what I get" is the same thing as "I get what I like"!''

'You might just as well say,' added the Dormouse, who seemed to be talking in his sleep, 'that "I breathe when I sleep" is the same thing as "I sleep when I breathe"!''

'It IS the same thing with you,' said the Hatter, and here the conversation dropped, and the party sat silent for a minute, while Alice thought over all she could remember about ravens and writing-desks, which wasn't much.

6. Vanligt och matematiskt språk

Vi kan illustrera det sagda med ett diagram över de olika språken. Inom språkvetenskapen anser man ofta att det är talspråket som är det grundläggande språket; skriften är inget eget språk utan blott en representation av språket. En förmodligen auktoritativ formulering av denna ståndpunkt ges av Kenneth Hyltenstam (1997:203): "Språk är i grunden talade kommunikationsmedel och tankeinstrument. De kan ha eller sakna skriftspråk." I varje fall är det klart att så är fallet om man ser till språkens totala historia – människan talade långt innan hon kunde skriva. Men i vår tid blir skriften allt viktigare, och det blir tydligt när man ser på formlerna.

Eftersom vi har muntligt och skriftligt språk, allmänspråk och matematiskt språk utan och med formler, så får vi sex olika fält när vi kombinerar dem.

<i>M, muntligt språk</i>	<i>S, skrift</i>
M1, Allmänsvenska	S1, Skriftlig allmänsvenska
M2, Muntligt matematiskt svenskt fackspråk	S2, Skrivet matematiskt svenskt fackspråk
M3, Muntligt matematiskt formelspråk	S3, Skrivna matematiska formler

Här är det tydligt att språket i ruta M3 inte kan styra det i S3, eftersom formelerna utvecklas som skrift, och M3 i själva verket blott är ett sätt att utläsa S3. Däremot är ju, som vi konstaterat, M1 dominerande i förhållande till S1, även om det finns en påverkan i den andra riktningen. Vad så gäller M2 och S2 så är det klart att S2 är relativt starkare än S1 jämfört med M1, eftersom man skriver matematik mer än man talar matematik.

Man kan nu spekulera över hur man lär sig de olika språken. Och man kanske till och med kan forska på det ...

7. Formler fordrar vana

Matematiska formler måste uppfylla stränga syntaktiska regler. Men även om de gör det kan de vara svårlästa. Det är lätt att illustrera hur svårt det matematiska formelspråket kan vara genom att byta ut några bokstäver.

Vad betyder följande?

$$\forall \delta \in \mathbf{R} \ \forall a > 0 \ \exists x > 0 \ \forall f \in \mathbf{R} \quad |f - \delta| \leq x \implies |\varepsilon(f) - \varepsilon(\delta)| \leq a.$$

Och vad betyder nästa formel?

$$\exists q \ \forall N > 0 \ \exists \varepsilon \ \forall p \quad p \geq \varepsilon \implies |a_p - q| \leq N.$$

Båda formelerna är helt korrekt skrivna och bryter inte mot några regler – utom den oskrivna som följer av att vi vant oss vid vissa bokstäver. Men

för en ny student är de bokstäver som vanligen används lika svåra som de ovanliga: allt är ju nytt.

Svaret får vi om vi byter bokstäver. Transformera det första exemplet så här:

$$(\delta, a, x, f, \varepsilon) \mapsto (a, \varepsilon, \delta, x, f).$$

Då blir det:

$$\forall a \in \mathbf{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbf{R} \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Uttytt: Funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig.

Transformera det andra exemplet så här:

$$(q, N, \varepsilon, p) \mapsto (a, \varepsilon, n, j).$$

Då blir det:

$$\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists n \forall j \quad j \geq n \implies |a_j - a| \leq \varepsilon.$$

Uttytt: Talföljden $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$ har ett gränsvärde.

8. Hur icke-matematiker läser matematiska tecken

På den gamla tiden, när det fanns sekreterare som skrev ut uppsatser på skrivmaskin, så kunde det bli så här. Först skrev den matematiske författaren ett tydligt ξ i sitt manuskript, senare otydligt, i övertygelsen att sekreteraren skulle förstå att det syftade på den första förekomsten. Men sekreterarna tolkade ofta den andra förekomsten som en ny bokstav, kanske ζ . För matematikerna var det självklart att man införde ett tecken för att använda det flera gånger. Men inte för sekreterarna: det tyckte att den andra förekomsten var helt annorlunda än den första – och det var den ju.

9. Formelspråk i tidningarna

I de flesta svenska tidningar klarar man att skriva diakritiska tecken i franska namn, men inte i slaviska namn. (Det säger något om språkens hackordning i Sverige.) Och formelspråket klarar tidningarna inte alls av. Här ett litet exempel:

Det stod H_2SO_4 i Upsala Nya Tidning 2005-02-05, sidan A24. Det ser litet konstigt ut när man är van vid H_2SO_4 .

det mindre kompakt:

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 4 \cdot 1\,000 + 4 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 100\,000 + 7 \cdot 1\,000\,000 + 9 \cdot 10\,000\,000$$

eller

$$4 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^7,$$

och de längre talen blir förstås ännu längre. Den matematiska förklaringen kan återigen skrivas litet kortare som

$$\sum_0^8 a_j \cdot 10^j, \text{ där } a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4, a_5 = 0, a_6 = 7, a_8 = 9.$$

Om man skulle träffa på en varelse från en annan planet som var matematiskt kunnig men inte kände till sättet att skriva heltal, så skulle man nog förklara positionssystemet så här. Men när små barn lär sig detta system, så går de till väga på ett litet annorlunda sätt, gissar jag.

Små barn lär sig att skriva ganska stora tal, och det som ligger bakom är förstås en genialisk uppfinning, där fyran betyder helt olika saker beroende på var den står. Det är mycket långt ifrån det gamla språkliga idealet ett tecken – en betydelse.

Vi kan gå vidare på denna väg och betrakta ett polynom

$$P(x) = \sum_0^8 a_j x^j.$$

Det tal vi började med är alltså polynomets värde $P(10)$ i punkten $x = 10$. Talet är ett polynom i basen 10, men koefficienterna får inte vara negativa eller större än 9. Om man med Tom Lehrer saknar två fingrar,³ så tittar man i stället på polynomets värde i punkten $x = 8$, alltså $P(8)$. Förklaringen som jag givit i matematiska termer är alltså ganska komplicerad. Men den kan, matematiskt sett, inte göras enklare: det visar hur avancerat och extremt förkortat beteckningssättet för vanliga heltal är.

³"The book [...] wants you to do it in base 8. But don't panic. Base 8 is just like base 10, really. If you're missing two fingers." (Citat från visan "New Math" på hans skiva *That Was The Year That Was* (1965).)

Inom algebran brukar man ju skriva produkten av två tal a och b som ab utan något tecken mellan bokstäverna. Men om $a = 2$ och $b = 3$ så kan vi ju inte sätta in dessa tal i produkten: då skulle vi ju få $ab = 23$. Vi måste plötsligt byta beteckningar och skriva $ab = a \cdot b = 2 \cdot 3 = 6$ eller $ab = a \times b = 2 \times 3 = 6$. Så till och med detta att skriva två storheter brevid varandra är ett avancerat teckensystem, och så populärt att det betyder minst två helt olika saker: $ab \neq 10a + b$ (för det mesta).

11. Språkens algebra

Vi tittar på några vanliga ord: *stol*, *stol-en*, *stol-ar*, *stol-ar-na*, *stol-s*, *stol-en-s*, *stol-ar-s*, *stol-ar-na-s*, *sjuk-hus*, *sjuk-hus-arbete*, *sjuk-hus-miljö*, *skol-hus*, *skol-arbete*, *skol-arbets-lag*, *skol-lärare*, *skol-lärar-strejk*. Vi ser hur de olika ordelementen kan fogas ihop. Inte godtyckligt, men i all fall med en viss frihet. Denna ordelementens algebra är mer eller mindre regelbunden i olika språk. I engelska och franska är den mer oregelbunden än i svenska; i turkiska och esperanto är den mer regelbunden än i svenska.

Och så förstås bokstäverna. Vi kan bilda många ord från ett par bokstäver: *ort*, *rot*, *tro*, *tor*, men inte *otr*, *rto*. I en matematisk algebra skulle alla sex produkterna *ort*, *otr*, *rot*, *rto*, *tor*, *tro* kunna bildas. Språket kommer med andra regler som gäller uttalet och underkänner vissa kombinationer, men godkänner tillräckligt många för att analogin med algebran skall vara tydlig. Rekordet kanske innehas av bokstäverna a , k , s : vi kan bilda *aks* (ax), *ask*, *kas*, *sak*, *ska* men inte *ksa*, dvs. fem av sex kombinationer är rimliga svenska ord. Om vi tar a , l , m duger tre av sex kombinationer som ord, *alm*, *lam*, *mal*, men inte *aml*, *lma*, *mla*.

Ändelserna *-ar* och *-na* kan användas till ordet *bok* (trädet): *bok*, *bok-ar*, *bok-ar-na*, medan det vanligare *bok*, *böck-er*, *böck-er-na* uppvisar en förändring, för att nu inte tala om *mus*, *möss*; *gås*, *gäss*; *smörgås*, *smörgäss*. Och ändelsen *-na* har en helt annan roll i *blek*, *blek-na*; *vit*, *vit-na*; *svart*, *svart-na*; *gul*, *gul-na*; *röd*, *rod-na*; *stark*, *stork-na*. Nu skall man inte tro att sådana dubbelbetydelser som hos *-na* inte förekommer i matematiken. Det gör de visst – tänk på vad det betyder att skriva två symboler brevid varandra utan något tecken emellan.

En vanlig adjektivändelse är *-isk* eller *-sk*. I neutrum blir det förstås *-iskt* respektive *-skt*. Så till substantivet *kust* kan vi bilda adjektivet *kustsk*, eller hur? Och i neutrum blir det *kustskt*. Så har vi genitiv-*s*, som kan fogas

även till adjektiv: *kustskts*. Kan detta förekomma naturligt? Tja, man kan tala om *en västkustsk skuta* och *ett västkustskt skepp* och i genitiv blir det då kanske: *ett ostkustskt skepps segel jämfört med ett västkustskts*. Detta visar hur långt bokstavsalgebran kan drivas. Detta är redan på gränsen av vad som kan uttalas. Längre kan man knappast gå.

Om ni tycker att detta är för extremt, tänk då på *ett reellt tals absolutbelopp jämfört med ett komplexts*.

12. Parenteser

Parentestecknen har en användning inom matematiken som liknar den de har i vanligt skriftspråk, men kanske ännu mer den som kommatecknen har.

I det vanliga språket skriver man ogärna en parentes inne i en annan, alltså (...(...)). Detta gör matematiker utan att tveka. Man kan till exempel ha ett uttryck som $7 - (4 - ((5 - 1) - (3 - 2)))$. Det kan tydas så att varje vänsterparentestecken flyttar ned uttrycket till en lägre nivå, och varje högerparentestecken lyfter upp det till en högre nivå. Åskådligt:

	$7 - (4 - ((5 - 1) - (3 - 2)))$
	$7 - \downarrow 4 - \downarrow\downarrow 5 - 1 \uparrow - \downarrow 3 - 2 \uparrow\uparrow\uparrow$
Nivå 0	7 -
Nivå -1	4 -
Nivå -2	-
Nivå -3	5 - 1 3 - 2

Men kommatecken! Dem skriver de klassiska humanisterna gärna. Det ansågs en gång mycket fint att nästla in bisatserna i varandra. Nu avråds man från detta, men vi kan i alla fall begrunda följande exempel.

Jag, som, utan att fråga dig, en av mina bästa vänner, om råd, tror mig ha förstått vad du tycker, vill inte åka.

Nivå 0	Jag ↓	vill inte åka.
Nivå -1	som ↓	tror mig ha förstått vad du tycker ↑
Nivå -2	utan att ha frågat dig ↓	om råd ↑
Nivå -3		en av mina bästa vänner ↑

Observera att man kan läsa bara nivå 0 eller bara nivåerna 0 och -1 eller bara nivåerna 0, -1 och -2 .

Bisatserna inom kommatecknen får en struktur som liknar matematikens parenteser.

Ett klassiskt exempel i samma bransch är det följande av August Strindberg, här citerat efter Josephson (2004:34): *Varuti just orsaken, varför staten, sedan de av proskriptionen de största brott blivit födda, ramlade, låg*. Strindberg ironiserar här över latinets satsfogningar, men exemplet är inte så komplicerat som det första: det går bara ned till nivå -2 .

Parenteser brukar orsaka problem i matematiken. Egentligen är ju bisatser inom komma ett snäpp svårare att avkoda, ty kommat visar inte om man skall gå ned eller upp, medan parentestecknen har riktning: (betyder att man skall gå ned en nivå och) att man skall gå upp.

13. Utbrytning

Att bryta ut det gemensamma är något som man sysslar med både i språken och matematiken. Vi har exemplen *växt- och djurliv*, *hjärt- och lungsjukdomar*, där *liv* respektive *sjukdomar* är ett gemensamt element, som kan brytas ut: *växtliv och djurliv* = (*växt och djur*)*liv*. Det kallas "utbrytning av det gemensamma". Samma ord, just *utbrytning*, använder man i matematiken: formeln $ac+bc = (a+b)c$ kallas utbrytning av en gemensam faktor c . Jag vet inte vilken av användningarna som är äldst eller om någon inspirerat den andra.

14. Hur långt kan man räkna?

Kaurna (uttalas [ga-úrna] tror jag) är ett australiskt språk, som talades i ett område nära Adelaide. Den sista person som talade kaurna flytande dog 1929; hon hette Ivaritji eller Ibaritji på kaurna, Mrs Amelia Taylor på engelska (Amery & Simpson 1995:146). Men den näst siste talaren dog 1907, så under sina 22 sista levnadsår hade hon ingen att tala med på kaurna (Rob Amery, personligt meddelande 1997-07-24). Hennes öde är inte unikt.

Emellertid är språket inte dött. Det har återupplivats. Det dokumenterades under 1840-talet av Christian Teichmann och Clamor Schürmann från

Dresden. Nu har en forskare, Rob Amery,⁴ verkat för ett återupplivande, och det finns åter talare. Kaurnafolket, som hade övergått till engelska, har överlevt och de har nu i viss utsträckning börjat tala sitt gamla språk. Dock kan man inte veta om det nuvarande uttalet är lika med det på 1800-talet. Man har rekonstruerat uttalet från Teichelmans och Schürmanns uppteckningar och med analogislut från grannspråk.

I kaurna fanns följande räkneord.

	Räkneord i kaurna
1	<i>kuma</i>
2	<i>purlaitye</i>
3	<i>marnkutye</i>
4	<i>yerrabula</i>

Det är dock inte så att kaurnafolket inte kunde räkna längre än till fyra. (Tanke och ord är inte samma sak.) För sina barn hade de benämningar enligt följande tabell (Amery & Simpson 1995:146):

Förstfödda dottern	<i>Kartanya, Kartiato</i>	Förstfödde sonen	<i>Kartammeru</i>
Andra dottern	<i>Waruyu</i>	Andre sonen	<i>Waritya</i>
Tredje dottern	<i>Kudnato</i>	Tredje sonen	<i>Kudnuitya</i>
Fjärde dottern	<i>Munato</i>	Fjärde sonen	<i>Munaitya</i>
Femte dottern	<i>Midlato</i>	Femte sonen	<i>Midlaitya</i>
Sjätte dottern	<i>Marruato</i>	Sjätte sonen	<i>Marrutya</i>
Sjunde dottern	<i>Wanguato</i>	Sjunde sonen	<i>Wangutya</i>
Åttonde dottern	(not recorded)	Åttonde sonen	(not recorded)
Nionde dottern	<i>Ngadlaato</i>	Nionde sonen	<i>Ngadlaitya</i>

Man har nu infört räkneord utgående från dessa ordningstal för barnen (Rob Amery, personligt meddelande 1997-08-11):

⁴Rob Amery hade en halvtidstjänst vid University of Adelaide när jag träffade honom 1997. Han ville inte ha mera: halva året var han universitetslärare; den andra halvan levde han med kaurnafolket – utanför penningekonomin. Nu är han vid University of South Australia i Adelaide.

	Räkneord i kurna med nya former
1	<i>kuma</i>
2	<i>purlaitye</i>
3	<i>marnkutye</i>
4	<i>yerrabula</i>
5	* <i>mila</i>
6	* <i>marru</i>
7	* <i>wangu</i>
8	* <i>ngarla</i>
9	* <i>paua</i>
10	* <i>kumirka</i> (from <i>kuma</i> 'one' + <i>irka</i> 'heap')
11	* <i>kumirka kuma</i>
12	* <i>kumirka purlaitye</i>
20	* <i>purlirka</i>
100	* <i>kuma partirka</i> (from <i>parto</i> 'big' + <i>irka</i> 'heap')
1 000	* <i>kumauatta</i> (from <i>kuma</i> 'one' + <i>tauatta</i> 'many')
1 000 000	* <i>kumiwurra</i> (from <i>kuma</i> 'one' + <i>wiwurra</i> 'multitude')

Amery anmärker angående namnet på talet fem, *mila*: "We avoided the prestopped form *midla* = *midla* 'woomera'." (Det engelska ordet *woomera*, registrerat första gången 1793, betyder enligt Webster 'a wooden rod with a hooked end used by Australian aborigines for throwing a spear').

Det nutida språket kurna är alltså ett delvis konstruerat språk. Inte heller detta är unikt.

Vi kan notera att orden för talen ett till och med fyra inte alls påminner om dem för de fyra förstfödda döttrarna eller söner. Jag vet inte vilken förbindelse som fanns mellan dessa ordfamiljer. För talen fem till och med nio finns nu en tydlig förbindelse – hur uppfattas den av talarna? Vi kan som jämförelse notera att de två första ordningstalen på svenska inte liknar motsvarande kardinaltal: *den första, ett; den andra, två*, medan de gör det från och med *den tredje, tre*.

Ett annat ord som behövs nuförtiden är *dator*. På kurna heter dator *muka muka karndo*, ordagrant 'blixthjärna', bildat av *mukamuka* 'hjärna' och *karndo* 'blix'. På grund av att tiden går allt fortare har man numera kortat ned detta något omständiga uttryck *muka muka karndo* till *mukarndo* 'dator'. Detta var en parentes.

Låt oss göra en tabell över alla sammansättningar av de sju orden e , a , b , ab , ba , aba , bab utan att använda synonymordboken:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba	bab
e	e	a	b	ab	ba	aba	bab
a	a	aa	ab	aab	aba	$aaba$	$abab$
b	b	ba	bb	bab	bba	$baba$	$bbab$
ab	ab	aba	abb	$abab$	$abba$	$ababa$	$abbab$
ba	ba	baa	bab	$baab$	$baba$	$baaba$	$babab$
aba	aba	$abaa$	$abab$	$abaab$	$ababa$	$abaaba$	$ababab$
bab	bab	$baba$	$babb$	$babab$	$babba$	$bababa$	$babbab$

Låt oss sedan förenkla denna genom att använda reglerna $aa = e$ och $bb = e$. Då blir det:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba	bab
e	e	a	b	ab	ba	aba	bab
a	a	e	ab	b	aba	ba	$abab$
b	b	ba	e	bab	a	$baba$	ab
ab	ab	aba	a	$abab$	e	$ababa$	b
ba	ba	b	bab	e	$baba$	a	$babab$
aba	aba	ab	$abab$	a	$ababa$	e	$ababab$
bab	bab	$baba$	ba	$babab$	b	$bababa$	e

Till slut inför vi regeln $bab = aba$ och kan förenkla ytterligare:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba	aba
e	e	a	b	ab	ba	aba	aba
a	a	e	ab	b	aba	ba	ba
b	b	ba	e	aba	a	ab	ab
ab	ab	aba	a	ba	e	b	b
ba	ba	b	aba	e	ab	a	a
aba	aba	ab	ba	a	b	e	e
aba	aba	ab	ba	a	b	e	e

Vi ser nu att den sista raden och den sista kolonnen är överflödiga. Om vi tar bort dessa, så får vi en fullständig tabell:

S_3	e	a	b	ab	ba	aba
e	e	a	b	ab	ba	aba
a	a	e	ab	b	aba	ba
b	b	ba	e	aba	a	ab
ab	ab	aba	a	ba	e	b
ba	ba	b	aba	e	ab	a
aba	aba	ab	ba	a	b	e

Vi ser att man genom sammansättning aldrig kan komma utanför de sex orden, dvs. de sex orden kan sammansättas hur mycket som helst med varje annat ord och man kan alltid reducera resultatet till ett av dessa sex. Språket blir alltså inte större än så.

Det jag just har beskrivit kallas inom matematiken för en *grupp*. Termen är en av dessa ganska många vardagliga ord som fått en alldeles speciell betydelse i matematiken. Det är en grupp med sex element. Den beskriver alla permutationer (omkastningar) av tre objekt, till exempel siffrorna 1, 2, 3. Det finns sex sätt att ordna dessa tre siffror, nämligen 123 (e), 132 (b), 213 (a), 231 (ab), 312 (ba), 321 (aba). Tabellen beskriver hur dessa omkastningar sätts samman, dvs. vad som händer när man kastar om, permuterar, objekten upprepade gånger. Gruppen är alltså gruppen av alla permutationer av tre element, ibland betecknad S_3 .

Teorin för grupper är en viktig matematisk teori, och alla grupper kan uppfattas som en samling ord skrivna i ett visst alfabet tillsammans med en synonymordbok som talar om vilka ord som är synonyma.

Ett skriftspråk med ett lexikon över alla ord och deras synonymer är alltså något som man använder sig av i grupp teorin. Språkligare än så kan det väl knappast bli.

16. Referenser

- Rob Amery; Jane Simpson 1995. Kaurua. I: Nick Thieberger; William McGregor, red., *Macquarie Aboriginal Words: a dictionary of words from Australian Aboriginal and Torres Strait Islander languages*, ss. 144–172. The Macquarie Library Pty Ltd, Macquarie University. xxxv + 724 ss.
- Kenneth Hyldenstam 1997. Om begreppen språk och dialekt och meänkielis status som eget språk. I: Eva Estergren & Hans Åhl (red.) *Mer än ett språk*, ss. 202–243. Stockholm: Norstedts.

- Olle Josephson 2004. *Ju: Ifrågasatta självklarheter om svenskan, engelskan och alla andra språk i Sverige*. Stockholm: Norstedts Ordbok. 191 ss.
- Christer Kiselman 1997. Matematiken i kulturen och kulturen i matematiken. *Annales Academiae Regiae Scientiarum Upsaliensis, 1995-1996*, **31**, 41–50.
- Håkan Lennerstad; Lars Mouwitz 2004. Mathematish—a tacit knowledge of mathematics. *I: C. Bergsten & B. Grevholm (red.), Mathematics and language. Proceedings of MADIF4*.
- Mall Stålhammar 1997. *Metaforernas mönster i fackspråk och allmänspråk*. Stockholm: Carlsson Bokförlag.
- Ulf Teleman 2002. *Åra, rikedom och reda: svensk språkvård och språkpolitik under äldre nyare tid*. Stockholm: Norstedts ordbok.

Främlingskapet till formelspråket – om den andra matematiken*

Vad händer med barns matematiska intuition och intresse när det möter matematiska formler? Har formler något innehåll, och i så fall vilket? Finns det särskilda kunskaper om formelspråket som är viktiga men som inte har någon direkt motsvarighet i intuitiv eller idémässig matematikförståelse? Hur reflekterad kunskap om förhållandet mellan matematikinnehåll och matematikformler har matematiklärarna? Är det viktigt?

Inledning

Uttrycket ”den andra matematiken” som förekommer i rubriken används här som ett samlingsbegrepp för tyst och outtalad kunskap i matematik. Det är sådan matematisk kunskap som sällan formuleras eller förmedlas, men är värdefull för elever/studenter när så sker. Man kan givetvis tänka sig tyst kunskap av många skilda slag.

Det finns anledning att förmoda att matematik är ett ämne som innehåller stora mängder tyst kunskap, varav flera typer kan urskiljas i relation till formelspråket. Tyst kunskap är ofta svår att påvisa, man får förlita sig på indirekta metoder. Indicier på tyst kunskap kan tas från undervisningspraktiken. Vi har den frånvarande dialogen mellan studenter och lärare i matematikämnet i allmänhet. Detta trots lärarnas så ofta uttalade vilja att nå dialog och att träna studenters verbala matematiska förmåga. Ämnets abstrakta karaktär kanske gör att det snarast skulle behövas mer verbalisering än i andra ämnen, och inte mindre. Ett annat indicium är att många studenter på högskolenivå finner matematikläroböckerna oläsliga, samma böcker som lärarna allmänt anser är tydliga, sakliga och har en bra framställning.

I denna text formuleras och diskuteras en distinktion av matematisk kunskap i tre typer: konkret, abstrakt idémässig och abstrakt formelmässig. Med idémässig abstrakt matematik avses alla sätt att beskriva, skissa eller antyda matematiska idéer och sammanhang som inte förlitar sig på formelspråk. Uthålligt arbete med konkret matematik i skolan leder ofta till idémässig abstrakt kunskap, men hur denna också ska leda till en formelmässig kunskap som hänger ihop med den idémässiga är ett annorlunda och svårare problem.

Ansatsen är således att inte se matematikens innehåll och språk som oskiljaktiga. De ses inte heller som separata. De två är mycket olika men sammanvävda. Språket är ständigt synligt och hanterbart för oss, svarta symboler på vitt papper som vi kan skriva på valfria sätt. Innehållet ”borde” vara tydligt och kristallklart som språket, men är nästan aldrig det. Det är oftast delvis klart, delvis oklart och halvt frånvarande. Men innehållet är trots dess ständiga partiella frånvaro meningen och syftet med de språkliga symbolerna och deras manipulationer.

Ur idémässig synvinkel ter sig ofta detta innehåll mindre frånvarande. Det finns mycket som tyder på att i riktning mot klyftan mellan idémässig och formelmässig matematik kan man finna verkningsfulla förklaringar till matematikens svårigheter och elevers avtagande matematikintresse under skolan. Att lära sig ett språk, även matematikens formelspråk, som vi kan kalla ”matematiska”, innebär alltid hantering av ord och/eller symboler, som har egna språkliga regler. Det kräver en separat uppmärksamhet. Det kan vara så att om det matematiska innehållet oavbrutet fokuseras så förhindras och försenas lärandet av formelspråkets regler, beteckningssätt och funktioner. Det leder något paradoxalt till en allt större svårighet att se matematiskt innehåll, eftersom det skrivs huvudsakligen på formelspråk, liksom att delta i dess aktiviteter. I detta sammanhang finns kanske en stor del av ”den andra matematiken”.

Idémässig och formelmässig matematik ses som två skilda sätt att beskriva väsentligen samma matematiska innehåll. Vad är då detta innehåll för något? Vad är de matematiska formlernas semantik? Om vi talar om två sätt att beskriva ett matematiskt innehåll, där det ena domineras av naturligt språk och det andra av matematikens formelspråk, och om vi är intresserade av det matematiska innehållet, så har vi i matematiken en viktig språklig frågeställning. Detta är inte förvånande med tanke på att matematiken är det enda ämne som har ett eget specialspråk som används på alla nivåer. Den ihållande tystnaden i matematikklasser kan också indikera ett språkligt problem. Elever finner det är olämpligt att använda sitt modersmål när det står matematik på schemat.

Språk är fundamentalt mänskligt och därmed i princip oreflekterat på liknande sätt som vårt sätt att gå eller sätt att röra stämbanden vid tal. Det är därför inte förvånande att matematiker och matematiklärare som är djupt engagerade i matematikens innehåll inte artikulerar det språkliga problemet. Språk används för att se *något annat*, det som orden pekar på. Det matematiska innehållet är dessutom särskilt svårtillgängligt, vilket ökar dess fokusering. Det gör det ännu svårare att få syn på språket som ett självständigt problem.

I artikeln definieras även en annan indelning av matematikkunskap i tre typer, nu utifrån formelspråket. Det är 1. Kunskap ”*över formlerna*” – om hur formler kan användas och kalkyler göras för att lyckas med matematisk problemlösning. 2. Kunskap ”*på formelnivå*” – om vilka regler som gäller för formelspråket. 3. Kunskap ”*under formlerna*” – om formlernas semantik/innebörder.

Dessutom beskrivs, exemplifieras och diskuteras fyra typer av innebörder – underavdelningar till ”kunskap under formlerna”. Det är 3A. Numerisk, 3B. Idémässig matematisk, 3C. Idémässig tillämpad, och 3D. Personlig.

Matematikens ovanliga egenskap är dess generalitet: att andra vetenskaper ryms under dess formler. Detta gör att matematikens egna begrepp blir svåråtkomliga. De är ”genomsnitt” av de andra vetenskapernas begrepp, vad som är gemensamt hos dem, eller av matematiken själv genererade begrepp. Således: i matematiken har vi ett ovanligt tydligt och väldefinierat språk, som tillåter mycket breda tolkningar, men vars ”egna” begrepp därmed ofta är avlägsna – just på grund av den stora tolkningsbredden.

Språkligheter hos matematiken

En diskussion om matematiska språkligheter kan utgå från två uppenbara observationer:

1. Inget ämne har ett eget specialspråk som används så flitigt som matematiken använder sitt. Formelspråket tränas från skolans första år, och är helt dominerande i forskning. Det har en central plats i varje text som handlar om matematik.
2. Det matematiska formlernas semantiska innehåll är betydligt mer svår-gripbart än innehållet i andra ämnen. Därmed är man i större grad hänvisad till formlerna (orden) som sådana.

Den första punkten kan sägas höra hemma i matematikämnets praktik - att formelspråket används på ett sätt som ger det en huvudroll. Den andra är en observation av matematikens karaktär - som kunskap om abstrakta förhållanden. Till dessa två observationer kan läggas en tredje ovan nämnda:

3. Det förefaller notoriskt svårt att få till stånd verbalisering av matematik i skolan.

Verbalisering har varit ett uttalat mål i skolan under många årtionden, men framstegen tycks vara minimala. Det förefaller som om elever tvekar att använda sitt modersmål i matematikämnet, mer än i andra ämnen. Har denna tvekan

att göra med att i matematikämnet förekommer ytterligare ett språk – formelspråket? Hämmar det modersmålets användning, har vi en konkurrens mellan språk? Om så är fallet, är det istället möjligt att använda modersmålet för att erövra både matematisk kunskap och kunskap om och skicklighet i detta specialspråk.

Vad är matematiska?

Låt oss kalla matematikens formelspråk för ”matematiska”. Det betyder vad som skrivs med siffror, bokstäver som ersätter siffror eller mängder, tecken för operationer (som $+$, $-$, $\int$, $\square$, Σ , $\cup$, $\cap$) och påståenden om vad som gäller operationerna (som $=$, $>$, $\neq$, $\in$, $\subseteq$). Termen ”matematiska” kommer att användas främst när formelspråkets egenskaper jämförs med andra språks egenskaper. Matematisk terminologi, som ”addition”, ”kontinuitet”, kan vi räkna till matematiskt fackspråk snarare än till matematiska. De lyder under svenskans grammatik.

Precis som naturliga språk har matematiska en grammatik. Om den inte är uppfylld är det omöjligt att avgöra om ett påstående är sant eller inte. Här är tre enkla exempel:

<i>Exempel på</i>	<i>Matematiska</i>	<i>Svenska</i>
Sanna påståenden	$3 + 4 = 7$	Grodor har två ögon.
Falska påståenden	$3 + 4 = 58$	Grodor har tre ögon.
Icke-påståenden	$3 (4 = 19$	Tre grodor ögon.

Men var hämtas sanningarna? Hur kontrollerar man vad som är sant? I exemplet ovan, för påståendet på svenska, hämtas sanningshalten från biologi. Matematiken har däremot sina egna sanningar, och är därför inte endast ett språk. Det är en vetenskap – matematiker undersöker vad som gäller och vad som inte gäller.

Matematiska är inte något självständigt språk. Det används tillsammans med naturligt språk för att uttrycka en viss typ av påståenden, som ursprungligen gäller kvantitativa förhållanden. På så sätt kan matematiskan beskrivas som ett hjälpspråk till naturligt språk. Emellertid uttrycks oftast den viktigaste informationen i en matematisk text på matematiska, så det är oerhört viktigt för en läsare att kunna dechiffrera och använda det.

Jämförelser mellan matematiska och naturliga språk

Esperanto är ett konstruerat språk. Det är konstruerat av en enskild person: den polsk-judiske läkaren Ludwig Zamenhof. Är matematiska ett konstruerat språk?

Nej, knappast. Matematiskans grammatik växte fram som en kortfattad version av naturliga språks grammatik, men har sedan dess utvecklats genom det egna innehållets dynamik, dvs. styrt av de behov matematikerna upplever. Språket är inte konstruerat av någon individ, det är framvuxet under en lång period i en specifik kultur: i en internationell vetenskaplig kultur. Det är inte alltid konsekvent, och det innehåller undantag, till skillnad från esperanto. I matematiska är det i större grad än i naturliga språk tillåtet för en enskild användare att göra egna lämpliga språkliga uppfinningar. De kallas definitioner.

De flesta av oss möter matematiska i förskolan eller tidigt i skolan. Är detta åldrar då matematiska kan läras helt intuitivt, som modersmålet? Om man ser till hur elever använder matematiska, förefaller det som om språket är ett gränsfall i detta avseende. Svaret tycks dock oftare vara nej än ja.

Matematiska är ett internationellt språk. I likhet med kinesiska uttalas matematiska på vitt skilda sätt, men skrivs på samma sätt. Likheten med kinesiska består i att tecknen inte representerar fonem, uttal, som i europeiska språk, utan betydelser.

Till detta kan läggas att matematiska är speciellt genom att dess talspråkskaraktär är underordnad. Språket läses och skrives mer än det talas. Det är vanligt att det upplevs som omöjligt att beskriva matematiska formler per telefon. Denna egenskap hos matematiskan är en särskild svårighet för strävan att verbalisera matematik.

Om matematisk kommunikation

Språk är till för kommunikation mellan människor. Gäller detta matematikens språk? Ja ibland, men på ett mer indirekt sätt än för naturliga språk. Matematikens praxis är till stor del ensamarbete. Matematiker arbetar till stor del ensamma med sina böcker och sitt tänkande, och elever arbetar ofta ensamma i läroboken. Huvuddelen av matematisk skriftlig verksamhet är säkerligen inte kommunikation – den läses aldrig av någon annan. Den som läses av någon annan är ofta anonym – man vet inte vem som kommer att vara mottagaren. Det gäller studenter och elever som läser läroböcker, och gäller också publicerade forskningsrapporter. Halv-anonym kan man beteckna en lärares undervisning i en klass, den riktar sig inte till en känd person men till en känd grupp. Den matematiska kommunikation som inte är anonym består av lärare som läser elevers/studenters lösningar, samarbetande lärare eller forskare, samt verbal kommunikation. Sammantaget tycks den icke-anonyma skriftliga matematiska kommunikationen ha en liten volym, och den som finns domineras av rättning – dvs.

ett kontrollsyrte. I verbal kommunikation är nog kontrollsyrftet mindre framträdande och sannolikt i högre grad gemensamma utforskningar om matematiska förhållanden.

Att nå fram till matematikens idéer

Matematik: konkret och abstrakt

Många lärare i skolan lyckas väl med att bygga upp en god förståelse för abstrakta begrepp hos barnen genom att arbeta med många skilda exempel för ett visst matematiskt begrepp. Om man börjar med att träna förståelse för bråk genom att dela en pizza i bitar, och därefter övergår till andra exempel där den matematiska idén är likartad, så kan bråkens exklusiva koppling till pizzor blir allt svagare för varje nytt exempel som man arbetar med. Det matematiska begreppet ”bråk” kan utkristallisera sig, vinna självständighet, och bli allt mindre knutet till specifika tillämpningar, dock lika användbart. Arbeta med konkret matematik kan, naturligtvis, leda till insikter om abstrakt matematik.

Abstrakt matematik: formel- och idémässig

Den ovan beskrivna grundläggande didaktiska metoden, från konkret till abstrakt genom många exempel, avspeglar en central komponent i matematikens natur. Grundläggande matematik kan sägas ha vuxit fram som en tillämpningsoberoende formulering av sådana kvantitativa samband som visat sig gälla för *många skilda sammanhang*. Detta sett ur mänsklighetens synvinkel, vars metod genom historien har varit och är ständigt kommunicerat och ihärdigt prövande och sökande. Matematiken kan därför lika väl sägas beskriva mänskliga synsätt som invariantska egenskaper hos tillvaron. Vi kan inte veta vad som är ”tillvaron” och vad som är ”mänskliga synsätt”.

Kan abstrakt matematik vara formler utan idéer?

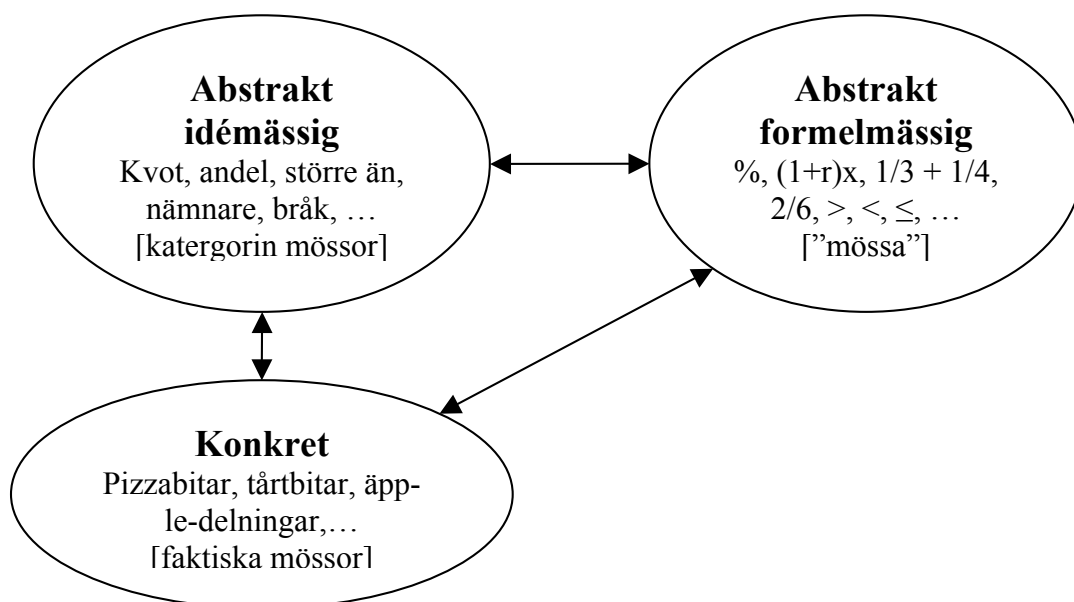
Men efter denna upptäckt, efter att denna tillämpningsoberoende formulering är gjord, finns möjligheten att arbeta med siffror och formler direkt, utan referens till någon tillämpning. De flesta lär sig räkna med 1, 2 och 3, och även använda dem i lämpliga praktiska situationer, utan att någonsin fundera över vad ”ett”, ”två” och ”tre” kan betyda. Man kan känna sig helt och hållet hemma med symbolerna i sig, vilket är en typ av matematikkompetens. Men i och med formeln finner sig problemet att idéerna, som är synliga i det konkreta, kan för elever helt försvinna ur synfältet på grund av ett främlingsskap gentemot matematiska siffror och/eller formler. Detta är ett utpräglat lingvistiskt problem. Sambandet mellan matematiska formler och matematiska begrepp är en central

och underskattad fråga. Åtminstone på grundskolenivå är det möjligt att tillägna sig en god förståelse för idémässig abstrakt matematik utan en förståelse för formelmässig matematik. Dessutom kan avsaknaden av formelmässig förståelse kan t.o.m. reducera eller omintetgöra den idémässiga, eftersom den formelmässiga ofta anses befinna sig på ”en högre nivå”. Tidiga former av förståelse betraktas ofta som barnsliga och inadekvata i ljuset av senare former av förståelse, även om de är korrekta och fundamentala.

Denna avsaknad av formelmässig förståelse kan ha många aspekter, vilka är mer eller mindre oberoende av varandra. Det kan vara att det idémässiga saknar förbindelse med det formelmässiga, eller att motivation och mening med det formelmässiga saknas, eller att lust för arbete med former saknas, eller att man inte förstår, kan komma ihåg eller använda de regler för räknandet som gäller för formler. Denna klyfta mellan det idémässigt abstrakta och det formelmässigt abstrakta är starkt relaterad till matematikens lingvistiska särdrag. Vi återkommer till dem senare.

Konkret, abstrakt idémässig, samt abstrakt formelmässig

Man kan alltså tala om tre domäner för matematisk kunskap: konkret, abstrakt idémässig, och abstrakt formelmässig. De antyds i följande figur, som också innehåller några enkla exempel.



I figuren finns ett icke-matematiskt exempel som illustrerar indelningen – ”mössa”. Med [faktiska mössor] menas de som ligger på hyllan i hallen. Med [kategorin mössor] menas vad du och jag kallar mössor, till skillnad från vad vi inte kallar mössor. Det är den kategorisering vi lärt oss och använder. Den är delvis

individuell, förändras under livet, men lever framförallt i vår kultur. Den byggs upp hos barn genom exempel och reflektion. Med [”mössa”] menas ordet ”mössa”. Ordet kan givetvis lätt hanteras språkligt om man är van vid språket och dess regler, med eller utan förståelse om dess innebörd. Men det innebär vissa fördelar att ha kategorin, innebörden, klart för sig.

Förmågan att hantera ordet ”mössa” språkligt har vi lärt spontant, men så är knappast fallet för matematiska uttryck. Motsvarande kategorier är också betydligt svåråtkomligare.

Vi återkommer senare i denna text till karaktäriseringar av de två abstrakta storheterna. De motsvarar skilda sätt att beskriva matematiska idéer – med naturligt språk och med matematiska. Det finns även andra skillnader i syfte och möjligheter, som att i den senare formuleringen kan exakta kvantitativa kalkyler göras. I ett senare avsnitt i denna text kommer vi att beskriva fyra olika typer av matematiskt innehåll för matematiska formler.

Matematikens språkliga särdrag är centrala för att förstå den matematisk kommunikationens villkor. Det gäller särskilt mellan lärare och elev, eftersom elever är den dominerande kategorin människor som är ofrivilligt matematikaktiva. Om man antar att de som frivilligt ägnar sig åt ett ämne har lätt för dess språk, ligger det nära till hands att anta att det finns relativt många elever som inte absorberar formelspråket på ett spontant och intuitivt sätt. Däremot har sannolikt de flesta matematiklärare gjort det, eftersom de valt matematik som sin yrkesverksamhet.

Språk och människor

Förmåga att tala och förmåga att gå

Språket beskrivs ofta som människans specialitet – människans främsta definierande egenskap. En människa lär sig naturligt att förstå och tala ett modersmål i den sociala miljö där hon växer upp. Ingen särskild skola eller träning behövs, även om den språkliga skickligheten är beroende av en rad faktorer. På liknande sätt lär sig människor under sin uppväxt att gå, trots att detta är en långt mer fundamental förmåga. Sett i ett mycket långt perspektiv är det mänskliga språket givetvis ett mycket yngre fenomen än gåendet, men de har det gemensamt att de lärs spontant. En annan skillnad är att språket lärs med uppmärksamheten fokuserad på något annat – på det man talar om. Detta talar för att språkförmåga är oartikulerad. Den behöver vara artikulerad endast vid lärande av ett främmande språk eller under andra speciella förhållanden, men den lärs med uttrycklig uppmärksamhet på något annat än språket självt.

Det förefaller givetvis som en paradox att talspråk skulle vara oartikulerad, eftersom dess grundläggande natur är just att vara artikulerad. Men här syftas på att *insikter om talspråkets struktur* inte alltid är kända, erkända eller uttalade. Termen ”oartikulerad” antyder att det är inte så svårt att formulera eller artikulera denna kunskap, om uppmärksamheten vänds åt det hållet.

Språklig förmåga kan samtidigt vara mycket hög och mycket omedveten

Ännu ett argument för att språkförmågan är oartikulerad är att man kan vara mycket skicklig på sitt modersmål men helt omedveten om substantiv, verb, prepositioner eller skilda tempus. Man kan vara mycket värtalig och felfri i sin språkanvändning, men helt oförmögen att svara på frågor som ”När säger man ”jag talade” och när säger man ”jag har talat” eller ”jag hade talat”?”, eller ”Har man olika ordföljd i frågor och i påståenden?”, eller ”När uttalas bokstaven ”k” mjukt och när uttalas den hårt?”. Det är frågor som vuxna personer som lär sig språket skulle kunna ställa – dvs personer som inte lär sig språket som ett modersmål.

Medvetenhet om språks struktur kommer från aktivitet i språkkurser, om det egna språket eller andra, från möten med personer som har ett annat modersmål och ställer frågor om språket eller ett allmänt aktivt språkintresse, då språket blir språkets objekt.

Vi studerar härnäst ett exempel på hur oreflekterad matematiskan är – likhetstecknet.

Exemplet ”=”

Symbolen ”=” uppfanns 1557 av Robert Recorde som en ren översättning av uttrycket ”is equalle to”, och slog igenom allmänt några årtionden senare. Det är förmodligen den enda symbol som förekommer i alla matematiska forskningsgrenar. Och det är den första symbol som elever lär sig i grundskolan, näst siffrorna själva och kanske plustecknet.

Ändå missbrukas likhetstecknet långt upp i gymnasiet. Vid beräkning av bensinkostnaden för en bilresa 20 mil med bensinförbrukning 0.8 l/mil och bensinpris 9.5 kr/l kan man se en kalkyl som

$$20 = 20 \cdot 0.8 = 16 = 16 \cdot 9.5 = 152.$$

Bensinkostnaden är 152 kronor. Här används ”=” ibland i meningen ”ger” eller ”leder till”, och inte i meningen ”är lika med” eller ”har samma värde som”.

Kalkylen fungerar genom att en person som gör denna kalkyl får veta vad denna ville ta reda på. Men en annan symbol än ”=” borde ha använts på två platser i den ovanstående kalkylen. Man kan ändå fråga sig: *Hur är det möjligt att en så grundläggande symbol missförstås i så stor utsträckning, trots lärarnas långa utbildning, alla goda intentioner, och elevernas tusentals och åter tusentals matematiklektioner?*

Svaret kan vara att man är så upptagen av de numeriska kalkylerna att man inte betraktar eller reflekterar över symbolerna som används. Uppmärksamheten ligger ständigt på en aspekt av det matematiska innehållet under symbolerna.

Svaret kan också vara att sådan reflekterad kunskap om matematiskans symboler varken finns i matematikkulturen eller i matematikundervisningskulturen. Den väntar på att bli formulerad och att bli en del av praktiken.

Ett annat exempel - parenteser

Studenter kan göra en kalkyl som $f(x)y = f(xy)$, med motiveringen att man kan multiplicera in i parenteser. Ett sådant brott mot matematiskans grammatik kan tala om för läraren att det finns olika typer av parenteser. Om funktionsbegreppet är tydligt under arbetet så kanske det är tydligt att detta är en annan sorts parentes. Således: om idéerna är synliga så behöver man inte vara medveten om alla grammatiska regler.

Det är klart att parenteser används helt annorlunda i matematiska och i svenska. I svenskt språkbruk kan det som står inom parenteser ofta utlämnas – det är parentetiskt. På matematiska är det inom parentes inte mindre viktigt än det utanför, snarare tvärtom. Det ska beräknas först.

Det är också karaktäristiskt att en lärare, för vilken matematikan ofta är naturlig och effektiv och därför oreflekterad, lär sig om detta språk från studenters tolkningsförsök. Det är analogt med invandrare som ställer frågor om regler i svenska språket, vilket ger svenskar bättre insikt om svenskans regler.

Kulturmöten framtvingar språkvetenskaper

Språkets osynlighet är värre för matematik än för naturliga språk på det viset att mötena mellan jordens många skilda kulturer, som har skilda språk, har tvingat fram formulering av språken, medveten förståelse av mänskliga språk, för att kunna översätta mellan kulturerna. En kultur som har lyckats att förstå en annan kulturs språk har en stor fördel. Kulturmötena har framtvingat språkvetenskap.

Denna drivkraft för att formulera matematiskan finns inte. Matematiskan saknar en språkvetenskap.

Skilda matematiska kunskaper relativt formelspråket

Vi gör i detta avsnitt en annan beskrivning av matematisk kunskap i tre delar än den föregående. Dessa kategorier är på distinkta sätt relaterade till formelspråket, och kan beskrivas med tre propositioner: **över**, **på** och **under** de matematiska formlerna.

Regler kontra reglers användning

Matematiska regler är mycket tydliga. Wittgenstein är känd för sin poäng att det inte går på något regelmässigt sätt att tala om hur en regel ska användas. En sådan regel skulle ge en ny fråga om hur denna regel ska användas, osv. Detta är och förblir otydlig kunskap. Men utan sådan kunskap är reglerna, givetvis, oanvändbara.

Låt oss vara mer konkreta. Antag att uppgiften är att förenkla de följande tre uttrycken:

$$1) \frac{\frac{2y}{z} + x}{\frac{z}{2y} - x} \quad 2) \frac{4x^2y - y^3}{2x + y} \quad 3) \frac{3^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{3} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Det finns ett antal regler som kan användas vid dessa uppgifter, som t.ex. distributiva lagen ($a(b + c) = ab + ac$), dubbelbråkförenkling ($\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$), produkt av bråk ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$), förlängning/förkortning ($\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$), konjugeringsregeln ($a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$), samt potenslagar som $\sqrt{a} = a^{1/2}$, $a^{-b} = 1/a^b$, och $a^{b+c} = a^b a^c$.

Man vilken ska vi använda först? I vilken ordning? När är uttrycket som mest förenklat? Hur avgör vi det? Finns det någon regel för det?

Nej, knappast. Om inte: pröva med 1), 2), 3) ovan. Kan du förklara *varför* du gör vad du gör, mer än med den synnerligen tautologiska motiveringen att "det leder till svaret"? Detta är matematikkultur, som är svår att definiera entydigt. Men ändå avgörande för att åstadkomma meningsfulla resultat. Böckerna antyder inte

ofta existensen av denna kunskap. En elev anar inte att något fattas, utan tolkar lätt luckorna som sin egen otillräcklighet.

Det är omöjligt att göra någon kalkyl utan att ha någon idé om målet, om varför kalkylen kan tänkas vara framgångsrik. Sådana idéer är därmed en viktig matematisk kompetens, ty annars påbörjas kalkyler som inte kan leda till målet, eller ingen kalkyl alls påbörjas. Detta är en kompetens om formler som objekt, som kan beskrivas som kunskap ”över” formelnivån:

Tillsammans med geometriska figurer är formelspråket, matematiskan, den synliga och handfasta delen av matematiken, i skarp kontrast till de generella och svåråtkomliga innebörderna. På grund av att språket är mycket tydligt och väldefinierat är det lämpligt som grund för en distinktion i olika typer av matematisk kunskap. Det är naturligt att tala om tre typer av matematisk kunskap.

Typ 1. Meta-matematik – matematiska kalkylmetoder (”över” matematiskan).

Vi har en uppsättning regler – men hur är det möjligt att använda dessa för att genomföra en kalkyl som ger önskat resultat? Denna kunskap är central för matematiker och för alla matematiska problemlösare. Den nämns i förbigående i böckerna, men huvuddelen är sannolikt tyst kunskap. Det handlar till stor del om associationer vid anblicken av olika uttryck och problemsituationer, vilka formats av tidigare räknepraktik.

Metoderna demonstreras vanligen utan kommentarer, ty de ord som förekommer är del av metoden, och inte av metodens beskrivning/förklaring. Denna kunskap kan endast datorprogrammeras i de få fall där det finns tydliga algoritmer. Exempelvis är derivering lättare att programmera än integration. Datoriserade lösningsmetoder är sällan effektiva, ty genomsökning av alla möjligheter är en långsam metod även med superdatorer. Denna kunskap kräver fantasi och representerar människans förmåga till framgångsrikt icke-algoritmiskt tänkande.

Denna kunskap kan inte skrivas med formelspråk.

Typ 2. Matematiskans syntax (på matematiskanivå).

Denna kunskap är kunskap om matematiskans regler. Det är matematiskans grammatik, där vi bortser från innebörder och användningar. Det är just den kunskap som måste formuleras när ett matematiskt symbolhanterande program ska konstrueras. Vissa regler är skrivkonventioner, som a^n för en produkt av n stycken a , medan andra är sanningar som används regelmässigt likt grammatiska regler – grammatiserade påståenden.

Denna kunskap är just kunskap om formelspråket.

Typ 3. Formlernas innebörder, semantik (kunskap "under" matematiskan).

Här finns matematikens tillämpningar, ursprungliga och nya. Här finns också innebörder i mer omedelbar, personlig och metaforisk mening, som de matematikaktivitas bilder och associationer. Sådana innebörder spelar ofta stor roll för den matematiska aktiviteten. Denna typ av innebörder är ofta tyst kunskap på grund av brist på matematisk verbal tradition. Den kan ge analogier och förslag till kalkylmetodkunskapen.

Denna kunskap kan skrivas med formelspråk, det är just detta språks syfte. Den kan dock, om än åtskilligt mindre precist, oftast även beskrivas eller skissas med naturligt språk.

Formlernas innebörder, typ 3, kan i sin tur delas in i fyra typer:

3A. Rent numeriska/formella innebörder.

Matematiska resultat är någon typ av påstående om numeriska förhållanden, om hur tal, grupper av tal eller andra storheter förhåller sig. *Matematiska bevis kontrollerar uteslutande detta numeriska/formella innehåll.*

Exempel: analysens huvudsats säger (i korthet) att om en primitiv funktion till $f(x)$ deriveras så blir detta $f(x)$. Beviset använder definitionen av integral samt integralkalkylens medelvärdessats, vilket anger något om skilda tals storleksförhållanden. Man kan i princip sätta in tal och se att det stämmer för dessa tal. I strikt mening säger satsen bara något om dessa tals förhållande till varandra. Denna strikta mening är den numeriska/formella innebörden.

3B. Matematiska idémässiga innebörder.

Detta är alla tolkningar, geometriska, kalkylmässiga och metaforiska, som inte är knutna till någon specifik tillämpning. Analysens huvudsats har många geometriska innebörder utöver dess numeriska innehåll, till exempel att man kan beräkna integraler genom omvänd derivering. En annan är bilden av derivata som lutning och integral som area, och vad huvudsatsen säger om sambandet mellan dem. Denna typ hänger ofta samman med innebörder över formlerna. En del av matematikens magi är att bevisen, som inte berör denna form av innebörd, ändå etablerar idémässiga samband.

3C. Tillämpade idémässiga innebörder.

Dessa innebörder har med någon tillämpning av matematiken att göra. En fysiker kan uppfatta matematiken som endast ett språk om denne har gott om fysikaliska tolkningar av de matematiska formlerna. Detta är givetvis fysikaliska innebörder för matematiska formler. Men matematiker har andra idémässiga innebörder – sådana som inte är knutna till någon specifik tillämpning.

3D. Personliga innebörder.

Varje matematikaktiv människa, eller grupp av matematikaktiva, utvecklar något typ av *personliga metaforer och innebörder* kring matematiska begrepp. Det kan vara minnesregler eller analogier. De kan spela en stor roll för det matematiska arbetet och för dess resultat. Vissa av dessa blir så småningom allmänt accepterade.

Några kommentarer till typerna av kunskap

För att beskriva matematiskt innehåll är naturligtvis matematiska det främsta språket. Men mänsklig förståelse tycks kräva beskrivningar även på andra språk, framförallt på modersmålet. Både elever och forskare, och förhoppningsvis även lärare, befinner sig i en situation av matematiskt lärande. Då är både matematiken och den egna personligheten närvarande och viktiga komponenter. Det kan göra att naturligt språk ibland är mer träffande än formelspråk även för matematiska förhållanden.

Men att beskriva matematiska innebörder på ”fel” språk, naturligt språk och inte formelspråk, är inte lätt. På grund av den språkliga dissonansen är det en uppgift med tydliga poetiska kvalitéer. Det är lätt att förstå att sådana beskrivningar inte är vanliga i praktisk undervisning.

Om en tvåspråkighet matematiska-svenska är tydlig i matematiken är *översättningar* mellan de två framställningssätten naturliga. Det är en aktivitet där formers detaljer granskas bit för bit, vilket vanligen inte sker vid *förklaringar*, och som tvingar fram ovan nämnd matematisk ”felspråkspoesi” (exempel: beskriv i detalj hur en bil fungerar med enbart psykologisk terminologi). Den överbrygger abstrakt idémässig och abstrakt formelmässig kunskap med ett otal mer eller mindre hållfasta bryggor.

Om vi anknyter till den tidigare gjorda indelningen i konkret, abstrakt idémässig och abstrakt formelmässig, så svarar konkret mot Typ 3C och 3D, abstrakt idémässig mot Typ 3B och 3D, och abstrakt formelmässig mot Typ 1, 2, 3A och 3D. Personliga innebörder, 3D, kan gälla alla typerna av kunskap.

Vilken typ av innehåll behandlas i dagens skola?

Om man utan någon särskild undersökning skulle försöka sig på att gradera den explicita uppmärksamhet som i skolan ägnas de ovan nämnda sex typerna av innebörder, så skulle den enligt min mening ske på följande sätt:

1. (stark dominans) Typ 3A – Bevis och kalkyler. Kalkyler dominerar. Bevis är emellertid på tillbakagång, även på högskolans ingenjörslinjer.
2. (förekommer ofta) Typ 3C – tillämpade idémässiga innebörder. Här har vi bl.a. skolans lästal.
3. (förekommer ibland) Typ 3B – matematiska idémässiga innebörder. Dessa framkommer huvudsakligen muntligt vid lärares svar på frågor och dialoger, och är viktiga för förståelsen. Förekommer ibland vid lärares genomgångar och sparsamt i läroböcker.
4. (förekommer sparsamt) Typ 1 – kalkylmetoder. Även denna viktiga typ av innebörd framkommer huvudsakligen muntligt vid dialoger. Förekommer sparsamt i läroböcker.
5. (förekommer mycket sparsamt) Typ 3D – personliga tolkningar. Oftast vid personliga dialoger mellan studenter, ibland med lärare. Förekommer också i internetkonversationer.
6. (förekommer mycket sparsamt) Typ 2 – matematiskans regler. Förekommer muntligt från lärare och mycket sparsamt i läroböcker, samt vid personliga dialoger.

Jag menar att Typ 3C är den enda kunskap som generellt beskrivs på ett bra sätt i dagens matematikpraktik. Den dominerande räknekulturen belyser Typ 2 endast implicit men inte explicit – en elev/student får själv huvudsakligen försöka dra sina slutsatser om kalkylernas regler. Man förväntas kunna språket, elever kan med rätta ställa sig frågan ”När då?”. Detta har just att göra med språks grundläggande osynlighet, som beskrivits tidigare.

Typ 1 är sällan uttalad skriftligt, men förutsätter en god kunskap om Typ 2. Typ 3B är mycket viktig, och kommuniceras sporadiskt. Den kan kommuniceras vid en god verbal kultur. I tidigare skolår får Typ 3D spela en roll, vilket kan vara en viktig orsak till de positivare matematikattityderna under dessa år.

Vad är möjligt och önskvärt?

Vi avslutar med en diskussion om möjliga eller önskade fördelningar av arbetstiden över de beskrivna typerna av innehåll. Jag menar att typ 2 – matematiskans regler bör ges en ganska stor plats (i dialog med elever/ studenter), men är en aspekt som om det verkligen ges en huvudroll sannolikt relativt snabbt töms ut och då inte längre behöver särskilt mycket tid. Warren Estys arbete pekar i den riktningen. Detta innebär att främlingsskapet till formelspråket minskar väsentligt. Typ 1 – matematiska kalkylmetoder är en naturlig följd efter att typ 2 – matematiskans regler är avklarad.

Jag menar att de andra typerna alla bör förekomma i matematikämnet i jämnare fördelning än idag. Ju bättre matematiskan fungerar som språk, både medvetenhet om dess regler och frihet i notationer och om dess semantik, ju flitigare kan detta språk användas i skolan på otvungna sätt.

En speciell roll spelar personliga tolkningar, typ 3D. Om studenters personliga tolkningar förekommer relativt ofta så är studenter delaktiga. Det innebär både att lärare utvecklas och får en allt större förmåga att möta närvarande och kommande studenter på framgångsrika sätt. Den innebär antagligen också att studenter upplever att de blir skickligare på logisk argumentation under matematikkurserna.

/ Håkan Lennerstad

* Referenser är utlämnade i denna preliminära rapport i essäform med hänvisning till den fullständiga rapporten i den kommande dokumentationen från workshopen vid KTH 2005-03-18.

Att kommunicera matematik i skolan

När man studerar och diskuterar matematik på en akademisk nivå så sker detta med hjälp av ett mycket speciellt och internationellt gångbart språk. En sådan typ av diskurs kan inte ske i grundskolan. Här måste man från början utgå från ett vardagligt språk och en hög grad av konkretisering. Språk och innehåll blir därmed nationellt och kulturellt beroende. Samtidigt bör det successivt ske en progression från det enkla konkreta till det abstrakta. Vad jag i den här artikeln vill debattera är villkoren för denna progression och vägen till en djupare matematisk förståelse.

Vad menas med matematik?

Skolans matematik, speciellt den i grundskolan, skiljer sig en hel del från den akademiska disciplinen matematik. Det gäller inte minst frågorna: *Vad är matematik?* och *Vems matematik?* Den definition av matematik som ges i Nationalencyklopedin ser t.ex. ut så här:

Matematik ..., en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling. Definitionen kan kommenteras på följande sätt. Matematiken är *abstrakt*: den har frigjort sig från det konkreta ursprunget hos problemen, vilket är en förutsättning för att den skall kunna vara *generell* dvs. tillämpbar i en mångfald situationer, men också för att den logiska giltigheten hos resonemangen skall kunna kartläggas.

Nyckelorden är här abstrakt, generell och logisk giltighet. Att studera matematik på den nivån kräver mognad och erfarenhet men också motivation.

Målen och villkoren för skolans matematikundervisning är annorlunda. För grundskolans vidkommande gäller det enligt kursplanen i matematik att under de första skolåren bygga upp enkla matematiska modeller för att eleverna skall kunna tolka sin omvärld och matematiska modeller som krävs för att förstå andra skolämnen. Med tanke på elevernas ålder och olika förutsättningar att lära, förutsätter kursplanen att undervisningen är konkret och bygger på elevernas erfarenheter. Frågan är hur detta på sikt skall leda till önskvärda kunskaper i matematik.

Diskursens beroende av situation och individ

En viktig förutsättning för att lära matematik är ett adekvat språk. Säljö och Wyndhamn (2002) menar att mänsklig kunskap är kodifierad i diskurser som utvecklas inom ramen för speciella verksamheter. Det gäller alltså att tillägna sig en diskurs för det fält inom vilket man rör sig och därmed de begrepp och resonemang som bygger upp denna diskurs. I skolans matematikundervisning är det läraren som i sin egenskap av arbetsledare ansvarar för diskursen utformning. Det här betyder att läraren måste

- kunna ta sina elevers perspektiv. Det räcker inte med att hon själv har förstått. Hon måste alltid fråga sig om detta kan förstås på andra sätt, för andra syften och utgående från andra erfarenheter och förkunskaper.
- behärska ett språk som fungerar inte bara för att förklara något eller för att lösa ett problem på ett formellt sätt. Språket måste också fungera för att konkretisera och verklighetsanpassa det som skall förklaras för eleverna.
- behärska såväl ämnesinnehållet som didaktiken i det som undervisas. Detta gäller inte bara för den åldersgrupp hon för tillfället undervisar. För att ge eleverna kontinuitet och en god progression i sina studier måste läraren också behärska ämnesinnehåll och didaktik på både högre och lägre utbildningsstadier. I annat fall kommer diskursen på längre sikt att förlora i precision.

En lärare som inte förmår ta detta lärarperspektiv i sin undervisning får svårigheter att se kopplingen mellan sin undervisning och elevernas inläring. De tolkar därför inläringssvårigheter som ett problem hos eleven, en oförmåga hos eleverna att tillägna sig ett matematikinnehåll. Problemen skulle enligt Säljö (2000) ”bättre förstås om vi analyserade de regler och traditioner för kommunikation som vuxit fram inom skola och utbildning...” (s. 12).

Kravet på konkretisering

Det är stor skillnad mellan dagens skolmatematik och den som undervisades för 40 – 50 år sedan. I realskolan var det en utvald grupp av elever som på ett tidigt stadium skulle lära sig att abstrahera. Ett övergripande mål var då att förbereda eleverna för vidare studier av matematik. Detta skedde på bekostnad av konkretiseringen. Under senare år har det blivit tvärtom. Eftersom alla elever i grundskolan erbjuds att lära samma matematik, prioriteras ofta konkretiseringen på bekostnad av abstraktionen. Eleverna lär sig att lösa enstaka problem, inte att

se de matematiska modellerna och hur dessa kan generaliseras för att tolka och hantera nya problem som dyker upp i vår omvärld.

Vid observation och analys av den undervisningen som idag sker i grundskolan kan man ofta konstatera att konkretisering har blivit en metafor för sysselsättning (Wyndhmn, Riesbäck & Schoulz, 2000). Detta kan tolkas som en missuppfattning av Deweys tes "learning by doing". Men i realiteten lär sig skolans elever inte matematik genom att "göra" utan snarare genom att reflektera över det som görs. För att kunna klassificeras som matematik bör det som görs leda till någon form av abstraktion och helst en generell sådan. Om detta skriver Szendrei (1996) så här.

Concrete materials in the mathematics classroom do not automatically produce either a good or bad effect. A teacher must plan the use of the materials in accordance with society's demands, the language of instruction and the philosophy of the school. (s. 433)

Den primära idén med att konkretisera undervisningen är att optimera kommunikationen och därmed inläringen. Konkretiseringen skall bidra till att ge förståelse och till att bygga upp ny kunskap utgående från de erfarenheter man redan har. Jag brukar vid utbildning av matematiklärare klarlägga värdet av och avsikten med att konkretisera på följande sätt.

Konkretisering innebär att med hjälp av ett material, en erfarenhet eller en metafor belysa ett matematiskt begrepp eller samband. Tyvärr beskriver den metodiska litteraturen "konkret material" på ett sätt som kan tolkas som att materialet har ett eget liv. Men materialet är dött, enbart en artefakt. Det är lärarens användning av materialet som kan göra det levande och betydelsebärande.

Ett material eller en metafor kan används som stöd för språket när det gäller att lyfta fram en struktur eller en idé som man vill att eleverna skall tillägna sig. Att använda ett material eller en metafor för att lösa enstaka problem utan koppling till en matematisk idé innebär oftast en ren manipulation. Om en elev genom konkretisering lyckats abstrahera, alltså att förstå en matematisk idé, så är det just den idé man tillägnat sig som skall tillämpas. I annat fall är konkretiseringen meningslös.

Det gäller också att vara medveten om ett materials eller en metafors begränsade förklaringsvärde. Metaforen temperaturskillnad som förklaring när man opererar med negativa tal fungerar i vissa situationer men utgör

samtidigt ett hinder för förståelse i andra situationer. En fråga man alltid bör ställa sig är därför vad det är man har konkretiserat.

Kravet på att abstrahera

I början av 1900-talet var realskolan och gymnasieskolan i första hand en förberedelse för akademiska studier. De innebar att det språk som användes redan i realskolan var formellt och korrekt. Efterhand som skolan har demokratiserats har dessa krav tonats ned. Många av de lärare som i dag undervisar i åren 1 – 6 saknar själva en formell matematisk skolning och är därför ofta omedvetna om språkets betydelse för matematikundervisningen under senare skolor. Många använder därför ett oklart och tvetydigt språk av typen ”dela den på den” vid division, ”fyrkantiga saker” för att beskriva rektanglar, ”Mäta på burkar och grejer” när man menar att mäta omkretsen av cylindrars basyta. Jag kan i min forskning iaktta att detta språkbruk även förekommer i grundskolans senare årskurser och hur detta leder till låg språklig precision. Innebörden i lärarens förklaringar når därför inte eleverna.

Det är inte bara språkbruket i sig som utgör ett problem. Även matematiska formler och uttryck förmedlar ett språkligt budskap, något långt ifrån alla lärare verkar vara medvetna om. Ett sådant exempel är formeln för cirkelområdets area. I skolan är det vanligt att eleverna får genomföra en laboration som går ut på att de, genom att klippa och klistra skall jämföra cirkelområdets area med radiekvadratens area. Poängen med laborationen är att ge eleverna möjligheter att upptäcka relationen mellan cirkelområde och radiekvadrat, alltså att det oberoende av radiens storlek finns en proportionalitetskonstant som man benämner π . Men det är inte vad man gör. Det man fokuserar uppmärksamheten på är att $\pi \approx 3,14$, en slutsats som är omöjlig att dra från den här laborationen. Inte heller visar man att proportionaliteten är generell. Man ”visar” att den gäller för en enda given cirkel. Idén med laborationen är det inget fel på, men istället för att konkretisera formeln för cirkelområdets area låter man eleverna manipulera. När jag observerat elever som utfört laborationen har jag hört kommentarer som ”Ska vi bara klistra och ha oss?” och ”Vad var det egentligen vi skulle komma fram till?”

Ett annat exempel är hur elever opererar med tal i bråkform. Enligt en pågående undersökning har drygt hälften av eleverna i skolor 7 problem med att lösa uppgifter som $8 \cdot \frac{1}{2}$. Ett skäl till detta verkar vara att de inte kan tolka innebörden i uppgiften och därmed inte tänka rationellt. Om man i de lägre årskurserna visat

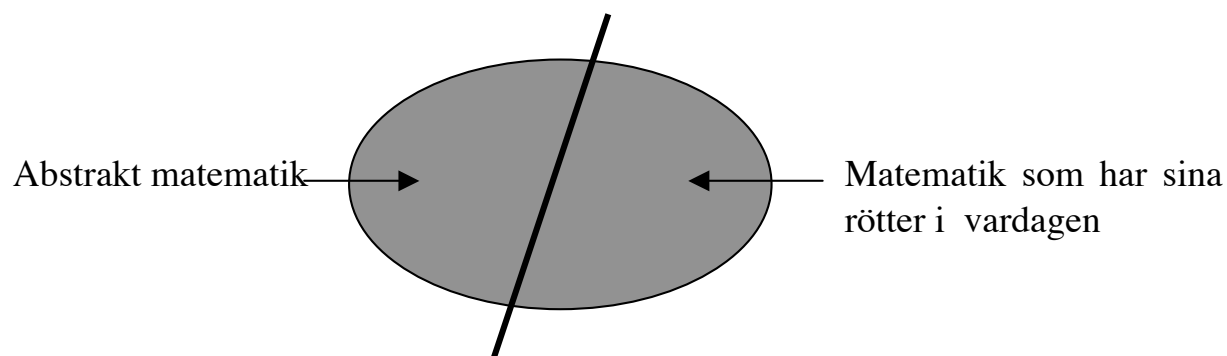
på hur man använder de grundläggande räknelagarna, skulle man kunna tolka operationen som $(4 \cdot 2) \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot (2 \cdot \frac{1}{2}) = 4$, vilket kan konkretiseras som att 8 halva är lika mycket som 4 hela.

Abstraktion är ett viktigt mål redan i den grundläggande matematikundervisningen. Redan siffrorna och talens namn är abstraktioner. Som exempel bör eleverna tidigt inse den generella innebörden i additioner som $3 + 5 = 8$. Denna operation skall nämligen i nästa steg kunna generaliseras till $13 + 5 = 18$, $23 + 5 = 28$ osv. Om varje steg måste konkretiseras så har man missat något fundamentalt i matematiken.

På motsvarande sätt bör eleverna tidigt (till en början informellt) lära sig innebörden i de grundläggande räknelagarna, t.ex. att $1 + 7 = 7 + 1$ och att $8 + 7$ kan beräknas som $8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5$. De bör också behärska positionssystemet och därmed betydelsen av tal som 423 och 178. För elever som tagit detta intellektuella steg är det bara besvärligt att, (vilket är vanligt i dagens läromedel) utföra subtraktioner som $423 - 178$ genom att skriva om talen som $400 + 20 + 3 - (100 + 70 + 8)$. Detta leder inte till en "bättre taluppfattning" utan utgör snarare ett hinder för abstraktion.

Kan allt konkretiseras?

Av viss metodisk litteratur får man uppfattningen att all matematik kan konkretiseras. Detta leder ibland till märkliga "rövarhistorier" (se t.ex. Kilborn, 1979). Enligt en mer progressiv syn kan man dela upp de moment som förekommer i grundskola och gymnasieskola i två olika kategorier, de som har sina rötter i vardagen och de som bygger på en matematisk logik och matematiska definitioner.



Till höger i figuren har vi den matematik som uppstått ur vardagen. Här finner man enkla huvudräkningsmetoder, algoritmer för de fyra räknesätten, enkel bråk- och procenträkning mm. Här finns också speciella matematiska modeller som utvecklats inom olika yrken och hantverk. Det ligger i sakens natur att det som har ett konkret ursprung också kan konkretiseras.

Till vänster i figuren har vi den matematik som uppstått genom matematikens interna behov, t.ex. genom en utvidgning av talområde eller som en följd av naturvetenskapliga eller samhällsvetenskapliga framsteg. Exempel på detta är algebraiska regler, ett speciellt geometriskt formelspråk mm.

Ett problem är emellertid att en hel del enkel matematik, med hjälp av algebran, har formaliserats på ett sådant sätt att den inom skolan flyttas från vardagsmatematikens till den abstrakta matematikens område. Att ta sig över skiljelinjen mellan dessa två områden utgör enligt vår uppfattning ett stort hinder för många elever eftersom de, liksom många lärare, söker en konkretisering som inte finns. I boken Löwing & Kilborn (2002) ges en rad exempel på såväl vad denna algebraisering har lett till som hur man kan undvika sådana här svårigheter.

Ett annat allvarligt problem är att många lärare försöker undvika den abstrakta, logiska uppbyggda matematiken. Man ger därmed indirekt eleverna uppfattningen att den inte behövs och att allt kan konkretiseras. Eleverna får av det skälet ingen övning i att dra enkla logiska slutsatser.

Den bakgrund jag gett i de senaste avsnitten kan vara en förklaring till varför så få ungdomar fortsätter att studera matematik. Den matematik de möter under de första skolåren handlar mer om att göra än att förstå sammanhang. När de senare möter mer formell matematik har de tvingats att utan förklaring acceptera formler, som för dem är helt obegripliga. Vad som saknas är enligt min uppfattning en teori som knyter samman enkla grundläggande begrepp med den mer formella matematik som efter hand krävs. Jag kallar detta för en didaktisk ämnesteorier för matematikundervisning (Löwing, 2002).

Diskursen i klassrummet

När man studerar den kommunikation som förs i klassrummen blir det uppenbart att språket har olika funktioner. Genom att studera dessa funktioner blir det möjligt att bedöma undervisningens kvalitet. I min forskning skiljer jag mellan två huvudkategorier, det *reglerande* språket och det *undervisande*

språket. Det reglerande språket används för social kontroll av arbetet i klassrummet. Till denna kategori hör tillsägelser, frånvarokontroll, indelning i grupper inför grupparbete etc. Det undervisande språket, används i inlärnings-syfte, t.ex. för att demonstrera, förklara och exemplifiera matematiska sammanhang. Inom dessa två områden kan läraren ha mycket olika språkbruk, delvis beroende på didaktisk kompetens.

När det gäller det undervisande språket delar jag upp det i följande underavdelningar:

- *Formellt undervisningsspråk*, som i sin tur delas upp i
 - a. *beskrivande (algoritmiskt) språk* och
 - b. *förklarande språk*
- *Informellt undervisningsspråk*, som delas upp i
 - c. *tillämpande (vardagsanknutet) språk*
 - d. *laborativt (manipulativt) språk*.

För att en kommunikation skall vara funktionell krävs det att aktörerna kan delta i samma diskurs, dvs. att de har ett gemensamt språk och gemensam för-förståelse inom det område som avhandlas. Så är inte alltid fallet i de klasser jag observerat (Löwing, 2004). De flesta av lärarna hade problem med att nå eleverna med sina förklaringar. Lärare och elever pratade ofta förbi varandra. Ett vanligt skäl till detta var att lärarna inte var medvetna om elevernas för-kunskaper. När lärarna förklarade var förklaringen oftast formell. Även när arbetssättet var laborativt använde läraren ett formellt undervisningsspråk sällan ett informellt språk eller med konkretiserande bilder.

Undervisning och hemspråk

Under de senaste åren har vi i skolan fått fler och fler elever med annat hem-språk än svenska. Alla verkar inte vara medvetna om vad detta innebär. Visser-ligen skrivs siffrorna på samma sätt i de flesta länder men talens namn och hur talen komponeras kan skilja sig avsevärt mellan olika kulturer.

I svenska språket förekommer en rad oregelbundenheter som alla inte är medvetna om. Talen elva och tolv säger ingenting om att talen komponerats av ett tiotal och ett respektive två ental. I talet tretton, fjorton, femton ... kommer ental och tiotal i fel ordning. Talet tjugo säger inte att det är komponerat av två tiotal vilket däremot framgår av talen trettio, fjortio, femtio.

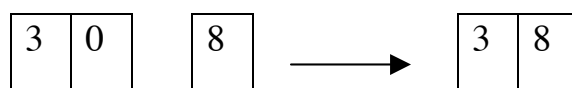
Om man jämför med det finska språket, vars fyra första talnamn är *yksi*, *kaksi*, *kolme*, *neljä*, så är tiotalen och tjugotalen mer logiskt uppbyggda. *Yksitoista*, *kaksitoista*, *kolmetoista*, *neljätoista* visar att man upprepar entalen ”på andra varvet” och *kaksikymmentäyksi*, *kaksikymmentäkaksi*, *kaksikymmentäkolme*, *kaksikymmenentneljä* att man lägger entalen till två tiotal. En intressant fråga är vad som händer när en elev tvingas byta undervisningsspråk från finska till svenska.

Ett annat intressant språk är italienskan där talen mellan 10 och 20 plötsligt byter karaktär: talen 11 till 16 heter *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, *sedici*, varvid entalet nämns före tiotalet *dici*. Däremot heter talen 17 – 19 *diciassette*, *diciotto* och *diciannove* där alltså tiotalet nämns före entalet. Liknande fenomen förekommer i franska, spanska och portugisiska.

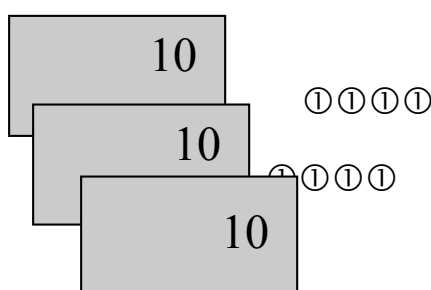
Andra språk såsom polska och vietnamesiska är perfekta i det avseendet att man läser talen som de skrivs med siffror, alltså 236 som 2 hundratal, 3 tiotal och 6. En fråga som många lärare bör ställa sig är hur ett byte från ett undervisningsspråk till ett annat påverkar elevers taluppfattning och därmed grunderna för deras matematikinläring.

När det gäller hemspråk och matematik handlar problemen inte enbart om olika språkbruk. Ännu viktigare är det att förstå kulturens roll och att därmed diskurserna är olika. Här följer ett exempel hämtat från en av mina klassrumsobservationer i en sydafrikansk skola.

Undervisningsspråket på skolan är engelska och man använder följaktligen ett engelskt material. Med hjälp av talkort skall läraren för en liten grupp elever förklara hur man bildar tal med hjälp av tiotal och ental. Talet 38 bildas t.ex. med hjälp av talkorten 30 och 8.

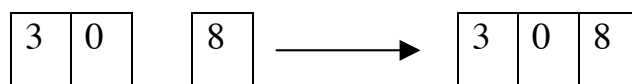


Det här visade sig vara alltför abstrakt för eleverna och de förstod inte. Läraren bytte då strategi och gick över till att använda pengar för att konkretisera. Nu avbildades operationen så här istället:



Detta ledde till två problem.

1. För det första sker all handel i provinsen på afrikaans och där heter 38 *ag en dertig*, alltså åtta och trettio och inte som på engelska trettio - åtta. Budskapet blev alltså bakvänt.
2. För det andra blev de två metaforerna, talkort och pengar, motstridiga. När läraren gick tillbaka till talkorten blev svaret därför



Som en tredje utväg utnyttjade läraren möjlighet att använda elevernas hemspråk Tsuana. Problemet är att där heter 38 *tre tiotal plus två från tio* (jämför XXXIIX med romerska siffror). Nu var förvirringen bland eleverna total, lektionen spårade ur och läraren avbröt och övergick till annan verksamhet.

Av det här exemplet framgår det att valet av konkretiseringsmodell är kulturberoende. Hur förutser man den här typen av språkliga/kulturella problem i svensk skola. Vad av detta tas upp i lärarutbildning och kompetensutveckling?

Didaktisk ämnesteorier för matematikundervisning

Enligt Nationalencyklopedin består en teori av

En grupp antaganden eller påståenden som förklarar företeelser av något slag och systematiserar vår kunskap om dem. En verksamhet sägs vara teoretisk i motsats till empirisk om den bygger på teori och därför inte enbart konstaterar fakta utan även förklarar givna fakta och eventuellt förutsäger nya.

I Löwing (2002) ges några exempel på en didaktisk ämnesteorier för matematikundervisning. Avsikten med denna teori är att lärarna med dess hjälp skall kunna förklara och systematisera den matematik som eleverna möter i skolan. Eleverna skall därigenom kunna tillägna sig matematiska modeller som de dels förstår, dels skall kunna använda för att tolka sin omvärld. Även om den här typen av modeller ofta är preliminära och anpassade till en viss utvecklingsnivå, så får de inte vara felaktiga. De skall på sikt, och vid behov, kunna utvecklas till en akademisk ämnesteorier och kan uppfattas som metod att konkretisera denna. Jag avslutar den här artikeln med att ge exempel på hur man kan bygga upp en teori kring bråk och räkning med bråk.

Flera av de regler för bråkräkning som man traditionellt lär i skolan är såväl svåra att förstå som att förklara. Eftersom de regler eleverna lär i skolan kommer att ingå i ett matematiskt språk, så kan konflikter mellan vardagsuppfattningar och formellt språk leda till konflikter i elevers tänkande. Ett exempel på sådana konflikter är att elever inte lär sig skilja mellan multiplikation och förlängning. $3 \cdot \frac{2}{5}$ blir därför $\frac{6}{15}$. Ett annat exempel är divisionen $\frac{2}{5}/3$ som elever lär sig lösa genom att skriva om divisionen som $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{1}$ och därefter invertera nämnaren och byta tecken $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$. Svaret blir rätt men få elever förstår vad de gör och de flesta glömmer därför hur det gick till.

Den alternativa strategi jag föreslår bygger på tre enkla förkunskaper:

A. Bråkens enheter, alltså nämnarens innebörd:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

B. Täljarens innebörd som beskriver antalet enheter som ingår i bråket:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

C. Att varje bråk kan skrivas på oändligt många olika sätt, dvs. ges olika namn:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots$$

För att utföra en **addition** som $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ gäller det att inse att nämnarna är olika.

Man kan inte addera olika enheter. Detta löser man med regel C.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \quad \text{och} \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$$

Genom att använda enheten $\frac{1}{12}$ finner vi alltså att $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$

För att utföra **multiplikationen** $3 \cdot \frac{2}{5}$ använder vi oss av förkunskap B.

Enligt B betyder $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Det innebär att $3 \cdot \frac{2}{5} = (\frac{1}{5} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{5}) = \frac{6}{5}$

För att utföra **divisionen** $\frac{4}{5} / 2$ behöver vi använda förkunskap B. Vi skriver alltså om $\frac{4}{5}$ som $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Detta skall nu delas i 2 delar: $(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{5})$. Det är alltså täljaren, **antalet** femtedelar, som skall divideras med 2. En alternativ lösning är att tänka i enheten femtedel, alltså:

4 femtedelar / 2 = 2 femtedelar

En divisionen som $\frac{2}{5} / 3$ verkar nu bli svår eftersom täljaren inte är delbar med 3. Vi provar nu de tre förkunskaperna A – C och målet måste vara att få täljaren delbar med 3. Genom att använda C finner vi att $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15}$ och nu är det, enligt exemplet direkt ovan, lätt: $\frac{2}{5} / 3 = \frac{6}{15} / 3 = \frac{2}{15}$.

Nu återstår i stor sett bara **innehållsdivisioner** som $\frac{3}{4} / \frac{1}{8}$. Frågan är nu hur många gånger $\frac{1}{8}$ ryms i $\frac{3}{4}$. Vi konstaterar först att nämnarna (enheterna) är olika. Vi skriver därför om $\frac{3}{4}$ som $\frac{6}{8}$. Men $\frac{6}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$. Vi finner då att $\frac{1}{8}$ ryms 6 gånger i $\frac{6}{8}$. Observera alltså att om nämnarna är lika så kan operationen reduceras till om att dividera täljarna.

De här exemplen visar hur man genom att analysera och omvärdera traditionella och svårbegripliga formler och operationer kan bygga upp ett för eleverna enklare och mer lättfattligt ”språk”. Ett viktigt kriterium är emellertid att de formler och det språk man på så sätt bygger upp inte medför konflikter med det etablerade, traditionella språket. Som framgår av exemplen är detta inte fallet. Det här sättet att lära sig grunderna för bråkräkning torde snarare innebära ett språkligt stöd för vidare utveckling av ett bråkkunnande.

Referenser

- Kilborn, W. (1979). *Ämnesmetodiska processanalyser i matematik inom KomVux*. Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.
- Löwing, M. (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning*. (IPD-rapport nr 2002:11) Göteborg: Göteborgs universitet. Institutionen för pedagogik och didaktik.
- Löwing, M. (2004). Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare – elev och matematiklektionens didaktiska ramar. *Göteborg Studies in Educational Sciences* 208. Acta universitatis Gothoburgensis.
- Löwing, M., & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborade (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Dordrecht: Kluwer
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Bokförlaget Prisma.
- Säljö, R. & Wyndhamn, J. (2002). Naturvetenskap som arena för kommunikation. I H. Strömdal. (Red.) *Kommunicera naturvetenskap i skolan – några forskningsresultat*. Lund: Studentlitteratur.
- Wyndhamn, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköping: Linköpings universitet. Institutionen för tillämpad lärarkunskap.

/ Madeleine Löwing

Svensk förening för matematikdidaktisk forskning, SMDF
Barbro Grevholm, ordförande
20050320

Till Utbildningsdepartementet
Svar på remiss U2004/3750/G

Vad är SMDF?

Svensk förening för matematikdidaktisk forskning, SMDF, bildades 1999 och är en förening för forskare, forskarstuderande, lärare och lärarutbildare med intresse för forskning i matematikdidaktik. Syftet med den föreningen är att stimulera, utveckla och bredda intresset för matematikdidaktisk forskning och forskarutbildning i Sverige. SMDF vill värna om kvaliteten i och öka spridningen av forskning i och om matematikutbildning. Föreningen vill också vara ett forum för samarbete med tanke- och erfarenhetsutbyte mellan personer verksamma inom och intresserade av forskning och utvecklingsarbete i matematikdidaktik.

Föreningen har bland annat anordnat internationella forskningsseminarier vart annat år. Dessa har dokumenterats i gedigna konferensböcker, som presenterar aktuell forskning i Sverige och utomlands. Genom dessa konferenser med deltagare från hela Sverige, men även genom mindre regionala konferenser, medverkar SMDF till spridning av forskningsresultat och fördjupad diskussion om frågor kring matematik och lärande. SMDF ger också ut ett medlemsblad två gånger per år. Det innehåller vetenskapliga artiklar och rapporter om utvecklingsarbeten inom matematikdidaktik.

Detta remissvar från SMDF har utarbetats av en arbetsgrupp utsedd i samband med årsmöte för SMDF i Stockholm den 28 januari 2005.

Vi lämnar först några allmänna synpunkter och går därefter in på vart och ett av de fyra huvudförslagen.

Allmänna synpunkter

Vi anser att ett av de allvarligaste problemen i svensk matematikundervisning är den mångåriga försummelsen som skett genom att Sverige inte utbildat tillräckligt många lärare i matematik. Det har under de senaste tio åren lett till att landets rektorer har anställt personer för att undervisa matematik, som inte har adekvat utbildning för sin uppgift. Dessa personer är nu inne i systemet och kan inte kastas ut. Skolan måste alltså leva med utbildade eller fel utbildade matematiklärare många år framåt. Den utbredda myten att det är så lätt att undervisa matematik så vem som helst kan göra det har här hjälpt till att skapa problem. Det räcker att se på hur många elever som inte uppnår målen med matematiken så inser man att undervisning som enbart går ut på att få lektionstiden att flyta lugnt inte räcker för att eleverna ska uppnå det lärande som krävs. Det är dags att både rektorer och de som ska arbeta som matematiklärare inser att för att eleverna ska lära sig det som önskas måste undervisningen göras av kvalificerade, välutbildade, insiktsfulla lärare.

Avsaknaden av en gedigen grundutbildning kan aldrig kompenseras av kompetensutveckling under arbetstiden. Kompetensutveckling är nödvändig för dem som startar med en gedigen grundutbildning för att de ska kunna följa med i den forskning och utveckling som sker inom deras område. För dem som saknar grundutbildning gäller att de måste få en sådan eller tilldelas andra arbetsuppgifter inom skolan. En person utan utbildning eller med icke adekvat utbildning som matematiklärare bör inte få fortsätta i arbetet enbart på grund av arbetsrättsliga bestämmelser. Det vore att utsätta generationer av elever för en orimligt undermålig matematikundervisning. Svenska elever har rätt att få undervisning av matematiklärare med adekvat utbildning. Många undersökningar har nu visat att så är inte fallet. Detta måste åtgärdas med kraft. Här måste stat och kommun gemensamt ta sitt ansvar.

Ett annat allvarligt problem sedan många år tillbaka är den bristande kvaliteten i lärarnas grundutbildning. Flera exempel på forskning kring olika aspekter av matematiklärarutbildning visar att de som blir lärare inte har tillräckligt goda kompetenser för sitt yrke. Nämnas kan forskning om lärarutbildning i matematik eller om verksamma lärare av Iris Attorps, Christer Bergsten, Maria Bjerneby-Häll, Barbro Grevholm, Thomas Lingefjärd, Madeleine Löwing med flera. En aktuell utvärdering kommer säkert att bekräfta den bild av bristande kompetens som vi pekar på. Den senaste omorganisationen av lärarutbildningen har lett till än sämre ämneskunskaper och ämnesdidaktiska kunskaper än tidigare. Sänkningen av förkunskaps-kraven för utbildning till matematiklärare bidrar till att

nivån i utbildningen sänks steg för steg. De som har att genomföra lärarutbildningen ser sig pressade att leva upp till statens krav på att få ut lärare trots omöjliga utgångspunkter. För att åtgärda denna svåra situation krävs en rad olika förändringar. Rekryteringen till lärarutbildningen behöver påverkas så att valet att bli lärare inte är en sista utväg för studenter. Läraryrket måste få tillbaka sin status genom rimliga löner och arbetsvillkor. Lärarna måste få ägna sig åt det de är utbildade för, nämligen att undervisa och handleda elever och de ska inte behöva se sin arbetstid splittrad och upptagen en hel rad andra arbetsuppgifter.

Det är väsentligt att inse att skolan är en institution för kunskap vilket nödvändiggör fokus på en kvalitativt hög matematisk och matematikdidaktisk *kunskap* för lärare och goda matematikkunskaper för elever. Respekten för läraryrket och dess status måste höjas och arbets- och lönevillkor förbättras. Varje lärare måste ha utrymme i sin tjänst för sin egen kompetensutveckling. För att markera vikten av ämneskompetens (i både matematik och matematikdidaktik) bör extra kurser i matematik och matematikdidaktik ges högt meritvärde vid anställning av lärare. Ett nationellt mastersprogram i matematik/matematikdidaktik med speciella villkor för yrkesverksamma lärare bör också utvecklas.

SMDF stöder förslaget om en fristående projektorganisation om den huvudsakligen ges en samordnande funktion och inte är för stor. Om alltför mycket makt läggs i projektorganisationen i form av ekonomiska resurser, så riskerar den nationella satsningen att bli för toppstyrd.

SMDF vill betona att det nu är viktigt att något görs på grundval av allt material som presenterats. Det mesta av dessa kunskaper har funnits redan i tidigare utredningar och förslag även om den del tillkommande undersökningar har förstärkt en sedan länge känd problembild. Den stora besvikelse som följde av att arbetet med Hög tid för matematik inte ledde till några insatser var välgrundad och något sådant får absolut inte upprepas igen. Då är det definitivt för sent att rädda svensk matematikundervisning innan flera generationer av ungdomar besvikna lämnar sin matematikskolning. På denna punkt att gå till konkreta åtgärder är tyvärr Matematikdelegationen alltför vag i sin framställning. Här behövs det preciseringar av vem som ska och kan göra vad och dessutom resurser. Att tro att stora förändringar kan ske inom existerande organisationer och finansieringsordningar är naivt. Vi vill till exempel peka på de välvilliga skrivningarna om forskning inom alla fyra huvudförslagen. Vad är de annat än tomma markeringar om inte krav reses på att tillföra resurser för sådan forskning. Det är för närvarande i stort sett omöjligt för forskare i mate-

matikdidaktik i Sverige att finna källor för att finansiera sin forskning. Nu krävs det initiativ och handling från departementets sida för att alla de på grundval av genomförda undersökningar och utredningar lagda förslagen ska bli trovärdiga.

Vi övergår nu till att kommentera förslaget punkt för punkt

Handlingsplan - Huvudförslag 1

Stöd och utveckla aktiviteter som ökar intresset för och insikterna om matematikens värde, roll och betydelse i vardag, yrkesliv, vetenskap och samhälle.

Delförslag

1A Sprid inspirerande exempel kring matematikens utveckling och användning.

1B Ge nya möjligheter till matematikutbildning för alla.

1C Berika bilden av matematik i massmedia.

1D Satsa på samarbete kring matematiken i arbetsliv och skola.

1E Stöd forskning om synen på matematik i samhälle och utbildning.

Handlingsplanen berör SMDF:s verksamhet på följande sätt:

SMDF har stora möjligheter att vara delaktigt i ett långsiktigt utvecklingsarbete och att vara ett forum för forskning, kunskapsspridning, samordning av nätverk och andra insatser över regiongränser. Hos SMDF finns en samlad kompetens inom en rad områden kring forskning om utbildning, undervisning och lärande i matematik, från förskola till högskola. Den matematikdidaktiska forskning som bedrivs i Sverige och internationellt har SMDF möjligheter att lyfta fram bland annat i böcker och debatter, för att berika bilden av matematik i massmedia och därmed medverka till en attitydförändring i samhället.

SMDF stöder att forskning bedrivs om attityder och föreställningar om matematik i samhälle och vardag och kan medverka till spridning av erfarenheter från sådan forskning. Vi är övertygade om att man genom forskning där man strävar efter att påvisa matematikens betydelse och användning både i vardag och professionellt liv kan påverka och förändra attityder till och föreställningar om matematik i samhället och hos enskilda individer.

SMDF stöder även förslaget om forskning kring matematik som bildningsämne. Matematikens kulturella och historiska betydelse samt inflytande över andra områden än utbildning bör lyftas fram för att påverka ungdomars, särskilt unga kvinnors, intresse för matematikintensiva utbildningar. Att knyta matematik till estetiska ämnen och konst kan vara en väg. Det skulle kunna betyda att högskolor och universitet utvecklar matematikkurser inom exempelvis traditionellt humanistiska ämnen som konsthistoria, etnologi och antropologi: *Matematik i ett kulturhistoriskt perspektiv*, *Matematik i ett migrationsperspektiv* eller *Matematik i ett konsthistoriskt perspektiv*. Kurser med liknande innehåll kanske också kan ges på folkhögskolor av olika slag. Forskning som konkretiserar etnomatematik kan vara betydelsefull i detta sammanhang.

SMDF stöder förslaget om forskning inom området som kan ge underlag för kompetensutveckling och ge möjlighet för enskilda människor att bygga på sin nuvarande utbildning för att få adekvat kompetens i matematik för sin yrkesutövning. För att i förlängningen påverka individers föreställningar om vad matematik är och kan användas till skulle exempelvis kurser med särskilt matematikinnehåll kunna utvecklas för pedagoger verksamma i konstmuseer eller musikmuseer. Forskning kan bidra med innehåll för sådan kursutveckling.

SMDF stöder också förslag med långsiktiga projekt som *Matematikens Hus* och *Matematikens Dag*, liksom tävlingar och andra initiativ som uppmärksammar matematik på olika sätt (sid 110f). Vi anser dock att sådana projekt bör grundas på och knytas till forskning inom området för att inte bli alltför tillfälliga.

Handlingsplan - Huvudförslag 2

Utbilda kvalificerade lärare i matematik för alla barn, ungdomar och vuxna

Delförslag

2A Förbättra rekrytering till och dimensionering av lärarutbildningen i matematik.

2B Utveckla den grundläggande lärarutbildningen i matematik på alla nivåer.

2C Ge stöd till behörighetsgivande kompetensutveckling och vidareutbildning.

2D Öka anslagen till forskning om lärarutbildning och kompetensutveckling.

Handlingsplanen berör SMDF:s verksamhet på följande sätt:

SMDF anser att matematiklärarens kompetens är en viktig och avgörande faktor för om elever ska kunna tillgodogöra sig matematikämnet eller inte. Matema-

tikläraren har det största ansvaret när det gäller att inspirera och skapa en positiv och kunskapstörstande attityd till matematikämnet. I betänkandet kan man läsa att även matematikdidaktisk forskning stödjer dessa påståenden och huvudförslag 2 är följaktligen riktat mot åtgärder som stärker utbildningen av matematiklärare.

SMDF anser att ämnesstudier i matematik bör vara av betydande omfattning för blivande matematiklärare. Den senaste reformeringen av lärarutbildningen innebar dock en tydlig kvalitetsförsämring avseende ämnesstudier i matematik och matematikdidaktik. Nu spenderas dyrbar studietid på allmänna kurser eller allmän samläsning mellan lärarstuderande som skall undervisa på helt olika nivåer. Delegationen ger inga tydliga förslag som stärker ämnesstudierna men klart är att delegationen i alla fall har uppfattat dagens situation som bristfällig. Bland annat står det att ”dagens lärarutbildning ger alltför litet utrymme för studier i matematik, tillämpad matematik, matematikdidaktik och praktik”. De fyra delförslagen är här av yttersta vikt.

Frågor om flerspråkiga (minoritets-, invandrar) elevers problem i matematikundervisningen är betydelsefulla och måste lyftas fram. Det handlar om att lärare i matematik måste sätta sig in i problematiken och hantera den på något sätt och inte om att problemet ska försvinna. Frågan måste alltid vara aktuell i kompetensutveckling av lärare.

Hos SMDF finns en samlad kompetens inom en rad områden kring forskning om utbildning, undervisning och lärande i matematik, från förskola till högskola. Den matematikdidaktiska forskning som bedrivs i Sverige och internationellt har SMDF möjligheter att kanalisera mot lärarutbildningen för att undersöka, stärka och validera olika framgångsrika ansatser mot bättre lärarkompetens. Lärarutbildningen bör i högre grad än idag vila på vetenskaplig grund.

Man bör dessutom vidta kraftfulla åtgärder för att åter göra läraryrket attraktivt. Höjda lärarlöner en viktig komponent men det bör även ställas krav på kommunerna att de endast anställer matematiklärare med adekvat och relevant utbildning.

Handlingsplan - Huvudförslag 3

Stöd och samordna alla goda krafter som verkar för bättre lärande och undervisning i matematik.

Delförslag

3A Utveckla distanskurser med kompetensutveckling för alla lärargrupper.

3B Initiera utvecklingsprojekt i matematik för alla studerande- och lärargrupper.

3C Skapa och underhåll webbportaler med sökbar, samlad information om resurser.

3D Bygg upp och underhåll nationellt och regionalt nätverk av resurspersoner.

3E Öka anslagen till forskning om undervisning och lärande i matematik

Handlingsplanen berör SMDF:s verksamhet på följande sätt:

3A Redan i utredningsmaterialet *Hög tid för matematik* finns förslag till kompetensutveckling och en diskussion om vad som erbjuds och krävs. Landets lärarutbildning har god kompetens att utveckla sådana kurser och med grund i forskning och utvecklingsprojekt av det slag som redovisas inom SMDFs verksamhet kan det arbetet fördjupas. I utredningsmaterialet påpekas också att lärarutbildare i matematik bör ha vetenskaplig skolning i såväl matematik som matematikdidaktik. Detta kan dock inte helt ersätta erfarenheter från skolans praktik. Det måste finnas en fungerande balans mellan akademiseringen av läraryrket och dess grund i praxis.

Det är nödvändigt att tydligt beskriva vad kompetensutvecklingskurser bör innehålla och vem som genomföra kurserna. De dagar för kompetensutveckling som redan finns i grundskolan verkar dåligt utnyttjade och skulle kunna riktas mot skolans centrala uppgift med fokus på kunskap.

Det är viktigt att satsningen blir långsiktig och bygger på existerande system för fortbildning så att kurser i ordinarie lärarutbildning kan utnyttjas. SMDF ställer sig tveksam till en kortsiktig fortbildning i stor skala som kan innebära slöseri med resurser. Lärarutbildningar som rekryterar verksamma lärare till sina kurser bör kunna få särskilt stöd för sådana insatser.

3B Det måste skapas starka incitament för skolor och kommuner att söka pengar för utvecklingsarbeten, i samarbete med lärarutbildningar, matematiska institutioner och andra institutioner där det finns matematikdidaktisk forskningsverksamhet. Utvecklingsarbeten med grund i egna initiativ har större chans att ge goda resultat än toppstyrda kortsiktiga fortbildningsresurser. Även i detta sammanhang är det viktigt att det finns en matematikansvarig i varje kommun och en matematikansvarig i varje skola/skolenhet.

3C SMDF ställer sig tveksamt till värdet av informationsresurser i form av webbportaler. Vi anser att problemen inte rör brist på information. Här handlar det istället om brist på djupare kunskaper om de processer vi arbetar med i skolans matematikundervisning.

3D Försök att bygga upp nationella och regionala nätverk av resurspersoner, både lärare och lärarutbildare har gjorts redan tidigare. Dessa har inte haft någon större framgång när det gäller lärare. För att sådana nätverk ska bli livskraftiga och framgångsrika krävs att de har en egen inre drivkraft och då hjälper inte toppstyrda initiativ.

3E Vetenskapsrådet måste se till att en rimlig del av forskningsresurserna tilldelas matematikdidaktisk forskning. På områden där skolmyndigheterna behöver forskningsresultat från Sverige skulle man kunna initiera kontakter mellan presumtiva svenska forskare med lämpliga forskare internationellt för samarbete. En kvalitativ utveckling av lärarutbildning och kompetensutveckling för lärare i matematik måste bygga på vetenskaplig grund. Det är därför nödvändigt att snabbt skapa resurser för att befrämja utvecklingen av en matematikdidaktisk forskning av hög kvalitet i landet. Ett första steg är att permanenta den nationella forskarskolan i matematikdidaktik. Det ser vi som mycket väsentligt.

SMDFs forskningsseminarier, granskningsprocesser vid konferenser och böcker med granskade arbeten bidrar med en successiv utveckling av kompetens hos forskarstuderande och forskare i matematikdidaktik. På sikt bör det medverka till att allt fler kvalificerar sig för att kunna få anslag från Vetenskapsrådet.

Handlingsplan - Huvudförslag 4

Tydliggör och utveckla syfte, mål, innehåll och bedömning i matematik för hela utbildnings-systemet

Delförslag

4A Konkretisera styrdokumentens matematikinnehåll från förskola till högskola.

4B Diskutera och förnya fortlöpande matematikinnehållet från förskola till högskola.

4C Utveckla variationsrik utvärdering i matematik på alla utbildningsnivåer.

4D Stärk forskning kring kursplaneutveckling och utvärdering.

Handlingsplanen berör SMDF:s verksamhet på följande sätt:

4A I SMDFs verksamhet behandlas forskning och utveckling som rör matematik och lärande. Innehållsmässigt finns det en kompetens inom SMDF som kan tas tillvara i myndigheternas och olika institutioners arbete med styrdokument och kursplaner. I januari 1999 lämnade till exempel den dåvarande ledaren för kursplanearbetet i matematik för gymnasieskolan (Barbro Grevholm) en skrivelse till Skolverket (beställd av Jan Sydoff) med förslag på forskning och långsiktigt utvecklingsarbete rörande styrdokument och kursplaner. Så vitt känt har detta inte följts upp från myndighetens sida. En samordnad och genomtänkt långsiktig satsning i linje med de givna förslagen skulle stärka skolmyndigheternas utvecklingsarbete. Genom brist på kontinuitet i tänkandet och historielöshet om skolans förändringsprocess riskerar man att det som byggs upp i en kursplanefas raderas i nästa. Det förvärras av att de ansvariga myndigheterna inte har egen kompetens inom det matematikdidaktiska området (och inte haft det på flera årtionden). Ett färskt exempel på sådan historielöshet om skolans utveckling visas i en aktuell mediedebatt om gymnasieskolans kursplaner. Förespråkare av att kurs A inte längre ska vara densamma för alla har inte tagit del av de argument som gällde då en gemensam kurs A infördes 1994. De har inte heller satt sig in i hur kurs A är tänkt att genomföras på olika program utan förespråkar ytligt en återgång till den gamla modellen som gällde före 1994 utan att redovisa konsekvenserna av sitt förslag. Eftersom skolverket inte har någon dokumentation av kursplanearbetet från början av 1990-talet kan de ansvariga där inte heller redovisa hur diskussionen gick.

4B Undersökningar visar att kursplaneförändringar endast i liten grad påverkar vardagsarbetet i skolan. Inte ens läromedelsförfattare blir nämnvärt påverkade av ändringar i styrdokumentet. Se till exempel forskning av Margareta Kristensson och Monica Johansson. Det som behövs är en levande debatt bland lärare och elever om vad målen för lärandet är och om varför dessa mål är väsentliga. En sådan debatt lyser med sin frånvaro. Det får liten effekt att ändra i styrdokument om inte lärarna aktivt engagerar sig för vad som är syftet för, målet med och innehållet i deras undervisning. Sådant engagemang skulle kunna väckas inom ramen för god kompetensutveckling av lärare.

4C Forskningen om utvärdering och bedömning av kunskaper och kompetenser i matematik är omfattande. Svenska lärare måste få ta del av detta och utveckla sin egen bedömning med utgångspunkt i aktuell forskning. Här behövs kurser och kompetensutvecklingsinsatser. SMDF har möjligheter att visa på lämplig forskning att utgå från och lämpliga modeller för kompetensutveckling av lärare.

4D Stärk forskning kring kursplaneutveckling och utvärdering. Förslag i linje med detta har som nämnts ovan lämnats till Skolverket redan 1999. Det gäller emellertid för Skolverket och Myndigheten för skolutveckling att skapa resurser för sådan forskning. Idag finns matematikdidaktisk forskning etablerad vid tiotalet institutioner för matematik i landet och det går fint att lägga ut sådana uppdrag på kvalificerade handledare i samarbete med doktorander. SMDF har ett kontaktnät och kan förmedla förslag till lämpliga personer att genomföra sådan forskning.

För arbetsgruppen

Barbro Grevholm

Ordförande i SMDF

First announcement – Call for Papers

Mathematics teaching and inclusion

The 3rd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics

Wednesday 23–Friday 25 November 2005 • Aalborg, Denmark

Researchers, teachers, writers, programme managers, and policy makers working within either the field of mathematics education and/or with special needs education in mathematics are invited to submit proposals for this 3rd Nordic Conference.

The 3rd Nordic Research Conference

The conference is the meeting place for researchers and practitioners from the Nordic countries with an interest in:

- teaching students with special needs in mathematics and
- research within this field

At the conference, there will be presentations followed by discussions of the research and development within the fields of special needs education in mathematics and that of teaching mathematics to students from the age of kindergarten to adults.

Conference theme

The conference theme, *Mathematics Teaching and Inclusion*, is intended to focus on the challenge for all schools today – the challenge of being *the inclusive school for all!* But what constitutes inclusion and how should it be developed in practice and policy at different levels? How is it interpreted in the various Nordic countries? Has the idea of inclusion affected the classroom of mathematics and has the idea influenced the special needs education?

Official languages

The official languages of the conference will be all the Scandinavian languages (Danish, Swedish and Norwegian). Plenary sessions will either be performed in English or in one of the Scandinavian languages. Presentations of papers in English will also be an option.

Call for contributions

Participants are invited to submit proposals for paper presentations and workshops. All proposals should contribute to the development of the conference theme, *Mathematics teaching and inclusion*. Participants who wish to submit a proposal are requested to send an abstract describing the category (paper or workshop, research or development work), the language in which the presentation will be presented, aim and main contents of the proposal. The abstract should be half a page long (200 – 300 words) and will be reviewed by the programme committee before acceptance. Abstracts are to be submitted as part of the registration form to the conference secretary (to: jane@ak.aau.dk) no later than July 1, 2005. Information regarding acceptance will be sent to the contributors in the beginning of September 2005.

Programme

The programme will include invited plenary talks (60 min), paper presentations (45 min), workshops (60 min), discussions and network get-together. There will be four plenary lectures, each with the intention of exploring different aspects of the conference theme. For details of the programme and further information, see conference web site at <http://www.matematikvanskeligheder.aau.dk>

Nordic Research Network on Special Needs Education in Mathematics was established in October 2003 on the 2nd Nordic Conference at Örebro University in Sweden. The first conference was held at Agder University College in Norway. The official homepage of the Nordic Network is:

<http://www.matematikkvansker.net>

/Arne Engström

E-postdresser till medverkande i *Medlemsblad* nr 11

Christer Bergsten	chber@mai.liu.se
Östen Dahl	oesten@ling.su.se
Arne Engström	arne.engstrom@pi.oru.se
Barbro Grevholm	barbro.grevholm@mna.hkr.se
Christer Kiselman	kiselman@math.uu.se
Håkan Lennerstad	lhakan@math.kth.se
Madeleine Löwing	madeleine.lowing@ped.gu.se

Anslagstavlan

Aktuella konferenser

PME 29, Melbourne, Australien 10-15 juli 2005

<http://staff.edfac.unimelb.edu.au/~chick/PME29/>

Norma 05, Trondheim, Norge 2-6 september 2005

<http://norma05.hist.no/>

3. Nordiske forskerkonference om matematikvanskeligheder,

23-25 november 2005, Aalborg, Danmark.

<http://matematikvanskeligheder.aau.dk/Forskerkonference/Velkommen.htm>

MADIF 5, Malmö, 24-25 januari 2006

<http://www.mai.liu.se/SMDF/madif5/>

Telefoner och e-postadresser till funktionärerna i SMDF:s styrelse 2004

Ordförande	Barbro Grevholm	044-203427	barbro.grevholm@mna.hkr.se
Vice ordförande	Christer Bergsten	013-282984	chber@mai.liu.se
Kassör	Thomas Lingefjärd	031-7732253	thomas.lingefjard@ped.gu.se
Sekreterare	Jesper Boesen	031-7736968	jesper.boesen@math.umu.se